

# Johdatus matematiikkaan

Luento 8

Mikko Salo  
13.9.2017



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

# Sisältö

## 1. Kertausta

# Kurssin suorittaminen

Kurssi suoritetaan loppuentillä (20.9. tai 4.10.). Arvostelu **hyväksytty/hylätty**. Tentissä on aikaa 4 h, ja hyväksytyyn suoritukseen tarvitaan **50 % tentin maksimipisteistä**.

Tentin materiaali:

- ▶ luentokalvot (8 luentoa)
- ▶ laskuharjoitustehtävät (4 harjoitusta)

**Muistakaa ilmoittautua tenttiin** (ja kurssille), to 14.9. klo 16 mennessä!

Muistakaa myös tehdä kurssin **palautekysely**.

# Kurssin rakenne

Kurssin laajuus 3 op ( $\approx 79$  h työskentelyä):

Luennot	18 h
Laskuharjoitukset	8 h
Itsenäinen opiskelu	40 h
Tenttiin valmistautuminen	9 h
Tentti	4 h
Yhteensä	79 h

Itsenäistä opiskelua  $\approx 4$  h / kontaktipäivä!

Matematiikkaa oppii vain laskemalla!

## Esimerkki

Matemaattisen päättelyn tunnusmerkkejä ovat: *varmuus* ja *täsmällisyys*. Kuinka "todistaa" väitteen:

$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}?$$

**Todistus.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} &= \frac{1001}{1000 \cdot 1001} - \frac{1000}{1000 \cdot 1001} \\ &= \frac{1001 - 1000}{1001000} \\ &= \frac{1}{1001000} < \frac{1}{1000000}\end{aligned}$$

koska  $1001000 > 1000000$ .



# Esimerkki

- ▶ Todistus on väitteen yksityiskohtainen perustelu. Jokainen askel on niin selvästi perusteltu, että lukija/kuulija voi vakuuttua väitteen paikkansapitävyydestä.

Yleinen väite: jos  $n$  on mikä hyvänsä positiivinen kokonaisluku, niin

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

sillä  $n(n+1) > n^2$ .

- ▶ Samalle väitteelle voi olla useita erilaisia todistuksia.

## Esimerkki

- ▶ Todistusta etsitään usein kokeilemalla erilaisia asioita suttupaperilla. Lopuksi varsinainen todistus kirjoitetaan siististi ylös, usein "käänteisessä järjestyksessä".

**Väite.**  $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$

**Todistus.** Koska  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 < 9^8$ , pätee

$$8! < 9^8$$

Kertomalla molemmat puolet luvulla  $(8!)^8$  saadaan

$$(8!)^9 < ((8!) \cdot 9)^8 = (9!)^8.$$

Korottamalla molemmat puolet potenssiin  $\frac{1}{72}$  saadaan väite

$$\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}.$$



# Matemaattinen teksti

Matematiikka on **luonnontieteiden kieli**. Opintojen alussa menee yleensä aikaa, ennen kuin uuden kielen käyttö omaksutaan (vrt. kiinan kielen opettelu).

Matemaattisen tekstin osia ovat mm.

- ▶ *määritelmät* (lyhyt nimi käsitteelle / symbolille)
- ▶ *esimerkit*
- ▶ *väitteet* (ilmaisevat yleisen tosiseikan, lause / teoreema / propositio / lemma)
- ▶ *todistukset*



# Lauseet

## Esimerkkilause (Kolmioepäyhtälö)

Kaikille reaaliluvuille  $a$  ja  $b$  pätee

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

## Esimerkkipropositio

Jos  $a$  ja  $b$  ovat reaalilukuja, niin pätee

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

## Esimerkkilemma

Jokaiselle reaaliluvulle  $x$  pätee

$$x \leq |x|.$$

# Todistukset

- ▶ Todistus on väitteen yksityiskohtainen perustelu. Jokainen askel on niin selvästi perusteltu, että lukija/kuulija voi vakuuttua väitteen paikkansapitävyydestä.

## Lemma

Jokaiselle reaaliluvulle  $x$  pätee  $x \leq |x|$ .

## Todistus.

**Tapaus 1.**  $x \geq 0$ . Tällöin  $|x| = x$ , ja selvästi

$$x = |x| \leq |x|.$$

**Tapaus 2.**  $x < 0$ . Tällöin  $|x| = -x$ , ja saadaan

$$x < 0 < -x = |x|.$$

Siis väite " $x \leq |x|$ " on tosi kaikille reaaliluvuille  $x$ .



# Vääräksi osoittaminen

Joskus voimme saada todistettavaksi lauseen, joka ei olekaan totta. Väitteen

Kaikille  $x$  pätee ominaisuus  $P(x)$

vääräksi osoittamiseksi riittää löytää yksi  $x$ , jolle  $P(x)$  ei päde. (Tätä kutsutaan **vastaesimerkiksi**.)

**Väite.** Kaikille reaaliluvuille  $x$  pätee  $x^2 - 4x + 4 > 0$ .

Yritykset osoittaa väite oikeaksi epäonnistuvat, joten yritetään löytää **vastaesimerkki**. Jos  $x = 2$ , niin väite saa muodon  $2^2 - 4 \cdot 2 + 4 > 0$ , eli  $0 > 0$ , mikä on epätosi. Vastaesimerkki  $x = 2$  kumoaa väitteen.

# Ongelmanratkaisua

G. Pólya esitteli kirjassaan "How to Solve It?" (1945) seuraavat askeleet matemaattisen ongelman ratkaisuun:

1. *Ymmärrä ongelma.*
2. *Tee suunnitelma.*
3. *Toteuta suunnitelma.*
4. *Arvioi ratkaisiasi. Voisiko sitä parantaa?*

# Loogiset konnektiivit

Matemaattisessa todistamisessa voidaan käyttää logiikasta peräisin olevia symboleita (konnektiiveja):

$\implies$  implikaationuoli, ""seuraa""

$\iff$  ekvivalenssinuoli, ""jos ja vain jos""

$\neg$  negaatio, ""ei""

Käytössä ovat myös universaalikvanttori  $\forall$  ("kaikille") ja eksistenssikvanttori  $\exists$  ("on olemassa").

Ylläolevat symbolit on hyvä tietää, kokeessa niitä ei vaadita.

# Negaatio

Jokaisella väitelauseella  $A$  on vastakohta eli negaatio ( $\neg A$ ).  
Esimerkiksi:

Väite	Negaatio
$\sqrt{2} \geq 3$	$\sqrt{2} < 3$
$2 \leq \pi \leq 3$	$\pi < 2$ tai $\pi > 3$
Kaikki tiet vievät Roomaan.	Jokin tie ei vie Roomaan.
Jos $f$ on derivoituva, niin $f$ on jatkuva.	On olemassa derivoituva $f$ , joka ei ole jatkuva.

Negaation muodostamista tarvitaan epäsuorassa todistuksessa.

# Jos ja vain jos –lauseet

Matematiikassa esiintyy usein "jos ja vain jos"-lauseita:

## Esimerkkilause

Kokonaisluku  $n$  on pariton jos ja vain jos  $n^2$  on pariton.

Väite "A jos ja vain jos B" (merkitään  $A \Leftrightarrow B$ ) tarkoittaa samaa kuin väite "A:sta seuraa B, ja B:stä seuraa A".

Jos ja vain jos –väitteessä on kaksi suuntaa (" $A \Rightarrow B$ " ja " $A \Leftarrow B$ "). Tällainen väite todistetaan yleensä kahdessa osassa (voidaan merkitä " $\Rightarrow$ " ja " $\Leftarrow$ ").

# Suora todistus

Suora todistus etenee vaiheittain suoraan oletuksista väitteeseen.

**Väite.** Jos luonnollinen luku  $n$  on pariton, niin  $n^2$  on pariton.

**Todistus.**

$$n \text{ pariton} \implies n = 2k + 1 \text{ jollekin } k$$

$$\implies n^2 = (2k + 1)^2$$

$$\implies n^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2$$

$$\implies n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\implies n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$\implies n^2 \text{ pariton.}$$





# Epäsuora todistus

Epäsuora todistus: tehdään vastaväite ja johdetaan ristiriita.

**Lause.** Jos  $n$  on positiivinen kokonaisluku ja  $n^2$  on pariton, niin  $n$  on pariton.

**Todistus.** Oletetaan, että  $n^2$  on pariton. Tehdään *vastaväite* (*vastaoletus*, *antiteesi*):  $n$  on parillinen. Tällöin pätee

$$n = 2k$$

jollekin kokonaisluvulle  $k$ . Lasketaan

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Siis  $n^2$  on parillinen. Tämä on *ristiriita* oletuksen, että  $n^2$  on pariton, kanssa. Täten vastaväitteen on pakko olla epätosi. Tämä todistaa lauseen. □

# Jaollisuus

## Määritelmä

Kokonaisluku  $n$  on *jaollinen* positiivisella kokonaisluvulla  $m$ , jos

$$n = km$$

jollekin kokonaisluvulle  $k$ . Tällöin merkitään  $m|n$ , ja sanotaan, että luku  $m$  on luvun  $n$  *tekijä*. Luku  $n \geq 2$  on *alkuluku*, jos se on jaollinen ainoastaan luvuilla 1 ja  $n$ .

## Esimerkki

Luvun 12 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, ja 12. Ensimmäiset alkuluvut ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

## Aritmetiikan peruslause

Jokainen kokonaisluku  $n \geq 2$  voidaan kirjoittaa muodossa  $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ , missä  $p_1, \dots, p_k$  ovat alkulukuja.

# Rationaaliluvut

## Määritelmä

Reaaliluku  $x$  on *rationaaliluku*, jos  $x = \frac{m}{n}$  joillekin kokonaisluvuille  $m$  ja  $n$ , missä  $n \geq 1$ .

(Jos  $x = \frac{m}{n}$  on rationaaliluku, aritmetiikan peruslauseen nojalla  $m$  (tai  $-m$ ) ja  $n$  ovat alkulukujen tuloja. Supistamalla yhteiset tekijät lausekkeesta  $\frac{m}{n}$  voidaan aina olettaa, että  $x = \frac{k}{\ell}$  missä kokonaisluvuilla  $k$  ja  $\ell$  ei ole yhteisiä tekijöitä.)

## Määritelmä

Reaaliluku  $x$  on *irrationaaliluku*, jos se ei ole rationaaliluku.

## Esimerkki

Luvut  $\frac{7}{8}$ ,  $-2$  ja  $\frac{1}{100}$  ovat rationaalilukuja. Luvut  $\sqrt{2}$  ja  $\pi$  ovat irrationaalilukuja.

## $\sqrt{2}$ on irrationaalinen

**Lause.**  $\sqrt{2}$  on irrationaalinen.

**Todistus.** Tehdään *vastaväite*:  $\sqrt{2}$  on rationaaliluku. Tällöin

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

joillekin kokonaisluvuille  $m$  ja  $n$ , joilla **ei ole yhteistä tekijää**. Korotetaan toiseen potenssiin:

$$2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Siis  $m^2 = 2n^2$ . Tästä seuraa että  $m$  on parillinen<sup>1</sup>, ts.  $m = 2k$  jollekin  $k$ , ja  $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ . Tällöin  $n^2 = 2k^2$  on parillinen, joten  $n$  on parillinen<sup>1</sup>. Siis  $m$  ja  $n$  ovat parillisia, mikä on *ristiriita*, sillä luvuilla  $m$  ja  $n$  ei ole yhteistä tekijää.  $\square$

---

<sup>1</sup>Perustele! (Epäsuora todistus tai aritmetiikan peruslause)

# Induktiotodistus

Induktio on hyödyllinen periaate, jonka avulla voidaan todistaa väitteitä muotoa

$P(n)$  on tosi kaikille positiivisille kokonaisluvuille  $n$ .

Induktiotodistuksessa on kolme vaihetta:

1. **Perusaskel.** Todista väite kun  $n = 1$  (ts. todista  $P(1)$ ).
2. **Induktio-oletus.** Oleta väite todeksi tapauksessa  $n = k$ , missä  $k \geq 1$  on mielivaltainen (ts. oleta  $P(k)$ ).
3. **Induktioaskel.** Todista väite tapauksessa  $n = k + 1$ , kun oletetaan, että väite on tosi tapauksessa  $n = k$  (ts. todista  $P(k + 1)$ ).

Vahvassa induktiossa induktio-oletus olettaa väitteen todeksi kaikilla  $n \leq k$ .

# Esimerkki

**Väite.** Kaikille  $n = 1, 2, 3, \dots$  pätee  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Todistus.** Todistetaan väite induktiolla.

1. **Perusaskel.** Väite pätee kun  $n = 1$ , sillä  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .
2. **Induktio-oletus.** Oletetaan, että  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ .
3. **Induktioaskel.** Todistetaan  $1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .  
Induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}. \end{aligned}$$

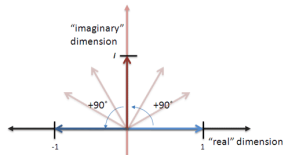
Induktioaskel on valmis. Väite seuraa induktioperiaatteen nojalla. □

# Kompleksiluvut

Tarkastellaan tason vektoreita  $(a, b)$ , missä  $a$  ja  $b$  ovat reaalilukuja. Ajatellaan, että  $x$ -akseli koostuu reaaliluvuista, ja  $y$ -akseli koostuu "kuvitteellisista luvuista" (imaginääriluvuista).

Halutaan asettaa tason vektoreille **uusi laskutoimitus**, ns. **kertolasku**, jolle pätee

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$



Koska  $x$ -akseli koostuu reaaliluvuista, tämä tarkoittaisi sitä, että vektori  $(0, 1)$  vastaa lukua  $\sqrt{-1}$  (sen neliö on  $-1$ ).

Tämän uuden laskutoimituksen ansiosta tason vektoreita voi ajatella **kompleksilukuina**.

# Kompleksiluvut

Käytännössä kompleksilukuja ajatellaan olioina

$$z = a + ib, \quad a, b \text{ reaalilukuja.}$$

Tässä  $i$  on ns. **imaginääriyksikkö** (vastaa vektoria  $(0, 1)$ ).

**Yhteenlasku** tapahtuu kuten tason vektoreilla:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

**Kertolaskua** varten riittää tietää kaava  $i^2 = -1$ . Jos tämän muistaa, niin kompleksilukuja voi kertoa niin kuin reaalilukuja:

$$(a+ib)(c+id) = ac+a(id)+(ib)c+(ib)(id) = ac-bd+i(ad+bc)$$

Määritelmä takaa, että tämä on mahdollista (ja että yhteen- ja kertolaskussa termien järjestyksellä ei ole väliä tms).



## Esimerkkejä

Pätee  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ,  $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ . Lisäksi

$$(3 + 2i) + (4 - 3i) = (3 + 4) + (2 - 3)i = 7 - i$$

ja

$$(3 + 2i)(4 - 3i) = 3 \cdot 4 - (2 \cdot (-3)) + i(2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) = 18 - i.$$

# Toisen asteen yhtälö

## Lause

Olkoot  $a, b, c$  reaalilukuja ja  $a \neq 0$ . Yhtälön  $az^2 + bz + c = 0$  (kompleksiluku)ratkaisut ovat

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{jos } b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{jos } b^2 - 4ac < 0.$$

## Esimerkki

Yhtälön  $z^2 + 9 = 0$  ratkaisut ovat  $z = \pm 3i$ .

# Jakolasku

Kompleksiluvuille voidaan määritellä yhteen- ja kertolaskun lisäksi jakolasku. Jos  $z = a + ib$ , käänteisluku  $\frac{1}{z}$  on

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Jos  $z, w$  ovat kompleksilukuja ja  $w \neq 0$ , niin  $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$ .

Esimerkkejä.

$$(a) \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$$

$$(b) \frac{2-5i}{3+4i} = (2-5i)\frac{1}{3+4i} = (2-5i)\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i.$$

# Kertolasku

Jokainen kompleksiluku  $z$  on muotoa  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  missä  $r = |z|$  ja  $\alpha$  on ns. **suuntakulma** (**argumentti**). Saadaan:

**Lause.** Kompleksilukujen  $z$  ja  $w$  tulo on

$$zw = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

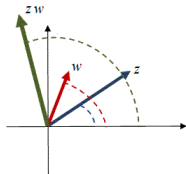
kun  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  ja  $w = s(\cos \beta + i \sin \beta)$ .

Siis kompleksilukujen  $z$  ja  $w$  kertolaskussa

- ▶ **pituudet  $r$  ja  $s$  kerrotaan keskenään**
- ▶ **suuntakulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  lasketaan yhteen**

Erityisesti  $i$  vastaa suuntakulmaa  $90^\circ$ , joten

**$i$ :llä kertominen =  $90^\circ$  kierto vastapäivään.**



# Joukko-oppia

Joukko on kokoelma objekteja (alkioita, jäseniä). Merkintöjä:

$x \in A$  ( $x$  kuuluu joukkoon  $A$ )

$x \notin A$  ( $x$  ei kuulu joukkoon  $A$ )

$A \subset B$  (joukko  $A$  on joukon  $B$  osajoukko, myös  $A \subseteq B$ )

$A \not\subset B$  (joukko  $A$  ei ole joukon  $B$  osajoukko)

$A = B$  ( $A$  ja  $B$  ovat samat joukot)

$\emptyset$  (tyhjä joukko)

$A$  on  $B$ :n osajoukko jos jokainen  $A$ :n alkio on myös  $B$ :n alkio. Tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkioita. Jos  $A$  koostuu alkioista  $x$ , jotka toteuttavat ehdon  $P(x)$ , merkitään

$$\begin{aligned} A &= \{x : x \text{ toteuttaa ehdon } P(x)\} \\ &= \{x \mid x \text{ toteuttaa ehdon } P(x)\}. \end{aligned}$$

# Lukujoukkoja

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (\text{luonnolliset luvut})$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{kokonaisluvut})$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{rationaaliluvut})$$

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ reaaliluku}\} \quad (\text{reaaliluvut})$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \quad (\text{kompleksiluvut}).$$

Pätee

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

# Joukko-operaatioita

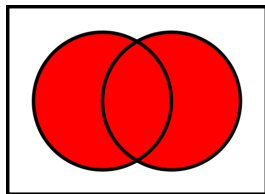
Olkoot  $A$  ja  $B$  joukkoja. Määritellään

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\} \quad (\text{yhdiste})$$

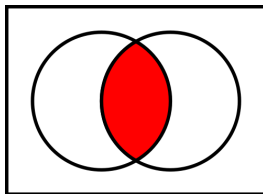
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\} \quad (\text{leikkaus})$$

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ ja } x \notin A\} \quad (\text{erotus})$$

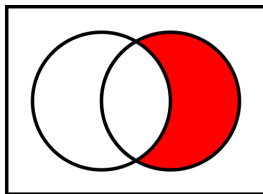
Joukko-operaatioita voi havainnollistaa [Venn-diagrammeilla](#):



$A \cup B$



$A \cap B$



$B \setminus A$

# Funktioista

Funktiot ovat kuvauksia yleisten joukkojen välillä.

## Määritelmä

Olkoot  $A$  ja  $B$  epätyhjiä joukkoja. Funktio eli kuvaus  $f : A \rightarrow B$  on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon  $A$  alkioon  $a$  täsmälleen yhden joukon  $B$  alkion  $f(a)$ . Sanotaan, että

$f(a)$  on funktion  $f$  arvo pisteessä/alkiossa  $a$ ,

ja  $f(a)$  on alkion  $a$  kuva kuvauksessa  $f$  (merkitään  $a \mapsto f(a)$ ).

Jos  $f : A \rightarrow B$  on funktio, joukkoa  $A$  sanotaan funktion  $f$  määrittelyjoukoksi ja joukkoa  $B$  sanotaan maalijoukoksi.

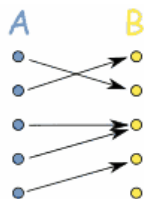


# Funktioista

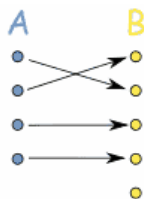
**Injektio:** kahdella eri alkiolla ei voi olla samaa kuvaa

**Surjektio:** jokainen maalijoukon alkio on jonkin pisteen kuva

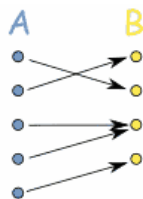
**Bijektio:** injektio ja surjektio, 1-1 vastaavuus  $A$ :n ja  $B$ :n välillä



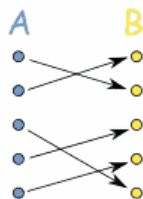
General  
Function



Injective  
Not surjective



Surjective  
Not injective



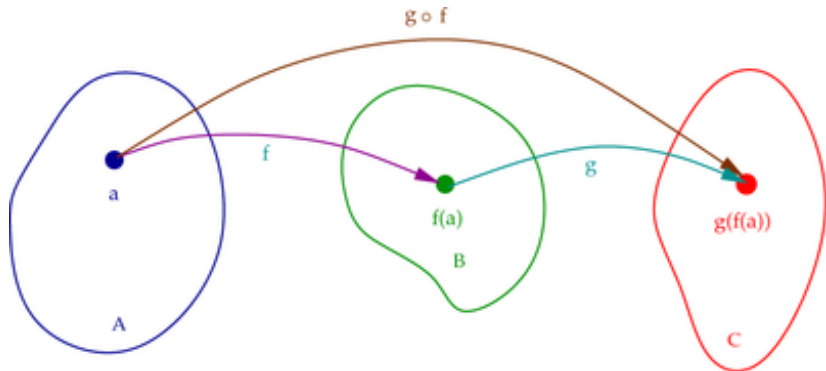
Bijektive  
(injective and  
surjective)

# Yhdistetty funktio

## Määritelmä

Olkoot  $f : A \rightarrow B$  ja  $g : B \rightarrow C$  funktioita. Funktioiden  $f$  ja  $g$  yhdistetty funktio  $g \circ f$  on funktio

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$



# Käänteisfunktio

Jos  $f : A \rightarrow B$  on **bijektio**, niin jokaiselle  $b \in B$  löytyy täsmälleen yksi  $a \in A$ , jolle  $f(a) = b$ . Tämä sääntö määrittelee funktion  $f$  **käänteisfunktion**

$$f^{-1} : B \rightarrow A.$$

Siis bijektiolle  $f$  voidaan määritellä käänteisfunktio  $g = f^{-1}$ , ja tämä toteuttaa ehdot

$$g(f(a)) = a \text{ kaikille } a \in A, \quad f(g(b)) = b \text{ kaikille } b \in B.$$

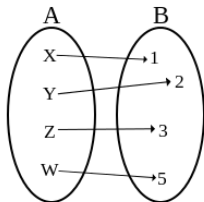
Toisaalta ylläolevat ehdot täyttävä kuvaus  $g$  on olemassa **jos ja vain jos**  $f$  on bijektio (miksi?), ja tällöin välttämättä  $g = f^{-1}$ .

# Joukkojen mahtavuus

## Määritelmä

Joukot  $A$  ja  $B$  ovat **yhtä mahtavia**, merkitään  $|A| = |B|$ , jos on olemassa jokin bijektio  $f : A \rightarrow B$ .

Muistetaan, että  $f : A \rightarrow B$  on bijektio jos se on **injektio** (eri alkiolla on eri kuvat) ja **surjektio** (jokainen  $B$ :n alkio on jonkin  $A$ :n alkion kuva). Bijektio antaa siis 1-1 vastaavuuden  $A$ :n ja  $B$ :n alkioiden välillä.



On tietystä mielessä luonnollista, että jos  $A$ :n ja  $B$ :n välillä on bijektio, niin  $A$ :ssa ja  $B$ :ssa on yhtä monta alkioita.

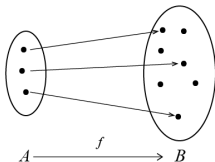
# Äärettömät joukot

Yksinkertaisin ääretön joukko on  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Nähtiin

$$|\{n \in \mathbb{N} : n \text{ on parillinen}\}| = |\mathbb{N}|.$$

## Määritelmä

- ▶ Joukko  $A$  on **aidosti vähemmän mahtava** kuin joukko  $B$ , merkitään  $|A| < |B|$ , jos on olemassa injektio  $f : A \rightarrow B$  mutta ei ole olemassa bijektiota  $A \rightarrow B$ .
- ▶ Joukko  $A$  on **numeroituvasti ääretön**, jos  $|A| = |\mathbb{N}|$ .
- ▶ Joukko  $A$  on **ylinumeroituva**, jos  $|\mathbb{N}| < |A|$ .



# Mahtavuuksien vertailua

## Lause

Joukot  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  ja  $\mathbb{Q}$  ovat numeroituvasti äärettömiä (ts.  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ ).

Toiset äärettömyydet ovat suurempia kuin toiset:

## Lause (Cantor 1874)

Reaalilukujen joukko on ylinumeroituva (ts.  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ).

## Todistus.

Epäsuora todistus ja Cantorin diagonaalargumentti.

