MATP100 Johdatus matematiikkaan

Harjoitus 1, 1.9.2017

Ei laskimia!

1. Osoita, että
$$\frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,002} < \frac{2}{1\,000\,000}.$$
Osoita yleisemmin, että jos n on positiivinen kokonaisluku, niin
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} < \frac{2}{n^2}.$$

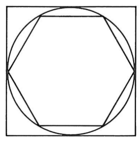
2. Osoita, että $\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}}$.
(*Vihje.* Kerro vasen puoli lausekkeella $\frac{\sqrt{1\,001}+\sqrt{1\,000}}{\sqrt{1\,001}+\sqrt{1\,000}}$.)

3. (a) Osoita, että $1+3+5+7+\ldots+195+197+199 = 10\,000$.
(b) Löydätkö lausekkeen summalle $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)$, kun n on positiivinen kokonaisluku? (Ei tarvitse todistaa tarkasti.)

4. Todista, että $\sqrt[6]{6!} > \sqrt[5]{5!}$

5. Todista, että $(1+\frac{1}{6})^6 < 6$.

6. Todista, että $3 < \pi < 4$, missä π määritellään seuraavasti: $\pi = \frac{\text{ympyrän kehän pituus}}{\text{ympyrän halkaisijan pituus}}$.
(*Vihje.* Hyödynnä viereistä kuvaa.)



7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että $5n^2+3n+4$ on parillinen.
(*Vihje.* Jaa osatapauksiin, joissa n on parillinen/pariton.)

8. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Todista huolellisesti, että mn on pariton täsmälleen silloin kun sekä m että n ovat parittomia.

9. Olkoon $n \geq 2$ parillinen luku. Jos $n \times n$ ruudukosta (shakkilaudasta) poistetaan kaksi vastakkaista kulmaruutua, osoita, että saatua ruudukkoa ei voi peittää 2×1 suorakaiteilla (ilman että ne menevät päällekkäin).

10. Olkoot a, b, c reaalilukuja, joille $a, b, c \geq 0$. Osoita, että
(a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$,
(b) $8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c)$.