

## MATP100 Johdatus matematiikkaan

Harjoitus 3, 8.9.2017

1. Todista induktiolla geometrisen summan kaava: jos  $a \neq 1$  on reaaliluku, niin

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad \text{kaikille } n = 1, 2, 3, \dots$$

2. *Kultainen leikkaus* on luku  $\ell > 1$ , jolle pätee seuraavaa: kun  $\ell \times 1$  suorakulmiosta poistetaan  $1 \times 1$  neliö, jäljelle jäävä suorakulmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa. Osoita, että  $\ell^2 = \ell + 1$ , ja etsi lauseke luvulle  $\ell$ . (*Vihje.* Katso kääntöpuolella oleva kuva.)
3. Olkoon  $\ell > 1$  edellisessä tehtävässä esiintynyt luku (*kultainen leikkaus*). Osoita induktiolla, että  $\ell^n = F_n \ell + F_{n-1}$  kaikille  $n \geq 2$ , missä  $F_n$  ovat luennoilla esiintyneet Fibonaccin luvut.
4. Olkoot  $a, b$  reaalilukuja, joille pätee  $a < b$ . Osoita, että avoimella välillä  $]a, b[$  on jokin rationaaliluku.<sup>1</sup> (*Vihje.* Epäsuora todistus. Lisäapua löytyy Juutisen Johdatus matematiikkaan -luentomonisteesta (Lause 2.3.23).)
5. Kirjoita seuraavat kompleksiluvut muodossa  $a + bi$  joillekin reaaliluvuille  $a, b$ :
- (a)  $(1 + 5i) + (-2 + 3i)$
  - (b)  $(2 - i)(1 + 4i)$
  - (c)  $\frac{1}{1+3i}$
  - (d)  $\frac{1+i}{1+3i}$
6. Osoita määritelmää käyttäen, että kahden kompleksiluvun  $z$  ja  $w$  tulolle pätee  $zw = wz$ .
7. Etsi seuraavien yhtälöiden kompleksiarvoiset ratkaisut, ja tarkista sijoittamalla yhtälöön että nämä todella ovat ratkaisuja:
- (a)  $z^2 + 9 = 0$
  - (b)  $z^2 + z + 1 = 0$
8. Etsi kaikki kompleksiluvut  $z$ , jotka toteuttavat yhtälön  $z + i = 2(1 - \bar{z})$ .
9. Määritellään  $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ , kun  $z = a + bi$  on kompleksiluku ja  $a, b$  ovat reaalilukuja. Osoita, että kaikilla kompleksiluvuilla  $z, w$  pätee:
- (a)  $e^{z+w} = e^z e^w$ , (b)  $e^z \neq 0$ , (c)  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ .

### Käännä!

---

<sup>1</sup>Avoin väli  $]a, b[$  koostuu niistä reaaliluvuista  $x$ , joille  $a < x < b$ .

