

MATP100 Johdatus matematiikkaan

Harjoitus 4, 15.9.2017

1. Esitä seuraavien joukkojen alkiot luettelomuodossa:
 - (a) $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 5\}$,
 - (b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$,
 - (c) $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$.
2. Määritä joukon $A = \{1, 2, 3\}$ kaikki osajoukot.
3. Osoita, että n alkion joukolla on yhteensä 2^n eri osajoukkoa. *Vihje.* Voit käyttää esimerkiksi induktiota.
4. Määritä joukot $A \cup B$, $A \cap B$ ja $B \setminus A$, kun
 - (a) $A = \{1, 2, 4\}$ ja $B = \{2, 3, 5, 7\}$,
 - (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 1\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ ja } x^2 < 25\}$.
5. Olkoon $A_n = \{-n, 0, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Määritä joukot

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{100} \quad \text{ja} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{100}.$$

6. Määritä joukot $A \cup B$, $A \cap B$ ja $A \setminus B$, kun

$$A = \{x \in [1, 2[: |x - \frac{7}{4}| \leq \frac{1}{2}\} \quad \text{ja} \quad B = \{y \in]0, 3[: 0 \leq y^2 - y - \frac{3}{4} \leq \frac{21}{4}\}.$$

Vihje. Selvitä ensin, mitä joukot A ja B ovat.

7. Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{a, b, c\}$. Anna esimerkki jostain funktiosta $f : A \rightarrow B$, joka ei ole injektio eikä surjektio.
8. Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ funktioita.
 - (a) Oletetaan, että $g \circ f : A \rightarrow C$ on injektio. Osoita, että f on injektio. Onko myös g injektio?
 - (b) Oletetaan, että $g \circ f : A \rightarrow C$ on surjektio. Osoita, että g on surjektio. Onko myös f surjektio?
9. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Määritä ne lukujen a ja b arvot, joilla f on bijektio, ja määritä lauseke käänteisfunktiolle f^{-1} .
10. Osoita tarkasti, että $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.