

Lukuteoria 1

Harjoitus 1, 17.1.2018

1. Osoita induktiolla, että

$$\sum_{j=0}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ovatko seuraavat väitteet totta? Todista tai keksi vastaesimerkki.

- (a) Jos $a \mid c$ ja $b \mid c$, niin $ab \mid c$.
(b) Jos $a \mid bc$, niin $a \mid c$.

3. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ovatko seuraavat väitteet totta? Todista tai keksi vastaesimerkki.

- (a) Jos $a \mid c$ ja $b \mid d$, niin $(a+b) \mid (c+d)$.
(b) Jos $a \mid c$ ja $b \mid d$, niin $ab \mid cd$.

4. Tässä tehtävässä osoitetaan Propositio 2.1.4. Olkoot $a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että

- (a) jos $a \mid b$ ja $b \mid c$, niin $a \mid c$. (transitiivisuus)
(b) jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid (mb + nc)$. (lineaarisuus)

5. Osoita seuraavat väitteet:

- (a) Kahden parillisen luvun summa on parillinen.
(b) Parillisen ja parittoman luvun summa on pariton.
(c) Kahden parittoman luvun summa on parillinen.

6. Osoita seuraavat väitteet:

- (a) Jos $a \in \mathbb{Z}$ ja a^2 on parillinen, niin a on parillinen.
(b) Jos $a, b \in \mathbb{Z}$ ja luku ab on pariton, niin sekä a että b ovat parittomia.

7. Olkoot a, b, c parittomia kokonaislukuja. Osoita, että yhtälöllä

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ei ole ratkaisua rationaalilukujen joukossa.

Opastus: tee vastaoletus, että on rationaaliluku $x_0 = \frac{m}{n}$ joka toteuttaa yhtälön. (Voit olettaa, että vähintään toinen luvuista m, n on pariton, koska jos molemmat olisivat parillisia, voitaisiin supistaa kakkosella niin kauan että vähintään toinen on pariton.) Kerro yhtälö $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ puolittain luvulla n^2 ja yritä osoittaa, että saadun yhtälön vasemmalla puolella oleva kokonaisluku ei voi olla 0, jolloin pääset ristiriitaan.