

## Lukuteoria 1

### Harjoitus 2, 24.1.2018

1. Sinulla on käytössä 16 ja 9 litran vesiämpärit. Onko mahdollista mitata näiden ämpärien avulla kolmanteen astiaan tasan yksi litra vettä? Jos on, kuinka tämän voi tehdä?
2. Lauseen 2.3.4 todistuksessa määritellään  $d = \min A$ . Osoita, että  $d \mid b$ .
3. Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ . Osoita, että jos  $b \mid c$ , niin  $\text{syt}(a, b) = \text{syt}(a + c, b)$ .
4. Onko yhtälöllä  $16x + 20y = 2$  kokonaislukuratkaisuja? Jos on, anna yksi esimerkki.
5. Laske Eukleideen algoritmilla  $\text{syt}(123, 456)$ .
6. Etsi edellisen tehtävän avulla jotkin luvut  $x, y \in \mathbb{Z}$ , joille pätee

$$123x + 456y = \text{syt}(123, 456).$$

7. Olkoon  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ja

$$B = \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq 2n\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}.$$

Olkoon  $C \subset B$  joukko, jossa on  $n + 1$  eri lukua. Osoita, että on sellaiset luvut  $b, c \in C$ , että  $\text{syt}(b, c) = 1$ .