

Lukuteoria 1

Harjoitus 3, 31.1.2018

Tehtävissä 1 ja 2 etsitään kaikki kokonaislukuratkaisut Diofantoksen yhtälölle

$$(*) \quad 27x + 11y = 3.$$

1. Laske Eukleideen algoritmilla $\text{syt}(27, 11)$, ja etsi sitten jokin kokonaislukuratkaisu yhtälölle

$$27x + 11y = \text{syt}(27, 11).$$

2. Etsi edellisen tehtävän avulla jokin kokonaislukuratkaisu yhtälölle (*), ja käytä sitten Lausetta 2.5.3 löytääksesi yhtälön (*) kaikki kokonaislukuratkaisut.
3. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Todista tai keksi vastaesimerkki.
 - (a) Kahden yhdistetyn luvun summa on yhdistetty luku.
 - (b) Kahden yhdistetyn luvun tulo on yhdistetty luku.
 - (c) Kahden alkuluvun summa on alkuluku.
 - (d) Kahden alkuluvun tulo on alkuluku.
4. Esitä yhdistetyt luvut 64 ja 99 alkulukujen tuloina.
5. Osoita seuraavat väitteet:
 - (a) Luku 2 on ainoa parillinen alkuluku.
 - (b) Olkoon p alkuluku. Tällöin se on ainoa alkuluku, joka on jaollinen luvulla p .
6. Luvut 3, 5 ja 7 ovat alkulukuja. Onko olemassa sellaista luonnollista lukua $a > 3$, että luvut a , $a + 2$ ja $a + 4$ ovat alkulukuja?
7. Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja

$$B = \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq 2n\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}.$$

Olkoon $C \subset B$ joukko, jossa on $n + 1$ eri lukua. Osoita, että on sellaiset luvut $b, c \in C$, että $b \mid c$.

Matemaatikkollegenda Paul Erdős (1913-1996) esitti usein tämän kysymyksen tavatessaan jonkun nuoren, matematiikasta kiinnostuneen ihmisen.