

## Lukuteoria 1

### Harjoitus 4, 7.2.2018

Näissä harjoituksissa käytetään seuraavia merkintöjä: Kaikkien alkulukujen joukko on  $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ , missä alkuluvut on numeroitu suuruusjärjestyksessä pienimmästä alkaen. Siis näissä harjoituksissa  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$  jne. (Huom! Tämä ei ole universaali merkintätapa lukuteoriassa, joten tämä merkintätapa pitää aina erikseen kertoa kun sitä haluaa käyttää. Monesti kirjaimilla  $p_1, p_2, \dots$  merkitään vain joitakin mielivaltaisia alkulukuja, kuten olemme luennoillakin nähneet.)

1. Osoita, että luku 107 on alkuluku.
2. Määritellään  $a_1 = p_1 + 1$ ,  $a_2 = p_1 p_2 + 1$ , yleisesti  $a_j = p_1 p_2 \cdots p_j + 1$ . Mitkä luvuista  $a_1, a_2, a_3, a_4$  ovat alkulukuja?
3. Etsi luvuille 63 ja 78 alkutekijäesitykset, ja selvitä niiden avulla  $\text{sy}(63, 78)$ .
4. Osoita, että jos  $a$  on yhdistetty luku, niin  $a \nmid [(a-1)! + 1]$ .
5. Esimerkissä 3.2.2 saatiin osoitettua, että äärettömän moni alkuluku on muotoa  $4n+3$  jollakin  $n \in \mathbb{N}$ . Yritä samalla idealla osoittaa, että äärettömän moni alkuluku on muotoa  $4l+1$  jollakin  $l \in \mathbb{Z}$ . Missä kohdassa todistusyrityksesi jää jumiin?
6. Olkoon  $p > 3$  alkuluku. Osoita, että  $p^2 = 12k + 1$  jollakin  $k \in \mathbb{N}$ .  
*Vihje:* On yhtäpitävää osoittaa, että luku  $(p+1)(p-1)$  on jaollinen luvulla 12.
7. Matemaatikko Mauno Matikka on lueskellut luentomonistetta ja löytänyt kaamean virheen: Lause 3.2.4 ja Seuraus 3.2.3 ovat ristiriidassa keskenään! Maunun argumentti käyttää näiden harjoitusten merkintöjä  $p_1, p_2, \dots$  ja on seuraavanlainen: Lauseen 3.2.4 nojalla mielivaltaisen suurelle luvulle  $m \in \mathbb{N}$  löytyy sellainen  $n \in \mathbb{N}$ , että  $p_{n+1} - p_n > m$ . Koska  $m$  on mielivaltaisen suuri, voidaan olettaa että  $m > 2^{2^n}$ . Mutta tällöin

$$p_{n+1} > p_n + m > m > 2^{2^n},$$

mikä on ristiriidassa Seurauksen 3.2.3 kanssa.

Miksi Maunun päättely on väärin?