Lukuteoria 1
Harjoitus 5, 14.2.2018

1. Todista Propositio 4.1.2: Olkoon $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ja $a, b \in \mathbb{Z}$. Tällöin $a \equiv b \pmod n$ täsmälleen sillä ehdolla, että on luvut $k, l, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$, joille $a = kn + r$ ja $b = ln + r$.

2. Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja $a, b \in \mathbb{Z}$. Osoita, että jos $a \equiv b \pmod n$ ja $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on luvun n tekijä, niin $a \equiv b \pmod d$.

3. Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ kaikilla $i \in \{1, ..., k\}$, missä $k \geq 2$ on luonnollinen luku. Oletetaan, että $a_i \equiv b_i \pmod n$ kaikilla $i \in \{1, ..., k\}$. Todista seuraavat väitteet:

(a)
$$\sum_{i=1}^{k} a_i \equiv \sum_{i=1}^{k} b_i \pmod n.$$

(b)
$$a_1 a_2 \cdots a_k \equiv b_1 b_2 \cdots b_k \pmod n.$$

4. Todista Lauseen 4.1.8 yleinen versio: Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$ lukuja, joille $ac \equiv bc \pmod n$. Jos $d = \mathrm{syt}(n, c)$, niin
$$a \equiv b \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{d}\right).$$

5. Mitkä seuraavista väitteistä ovat oikein ja mitkä väärin?
(a) $3 \mid 18\,643\,560$.
(b) $4 \mid 18\,643\,560$.
(c) $9 \mid 18\,643\,560$.

6. (a) Onko sellaista lukua $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, että $[3]_6[a]_6 = [1]_6$?
(b) Onko sellaista lukua $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, että $[3]_7[a]_7 = [1]_7$?

7. Osoita, että ei ole olemassa sellaista suorakulmaista kolmiota, jonka kaikkien sivujen pituudet ovat alkulukuja.