Lukuteoria 1
Harjoitus 6, 21.2.2018

1. Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja $a, b \in \mathbb{Z}$. Oletetaan, että $x_0 \in [a]_n$ ja $y_0 \in [b]_n$. Osoita, että $x_0 y_0 \in [ab]_n$. (Tämä tulos perustelee, miksi kongruenssiluokkien välinen kertolasku on hyvin määritelty laskutoimitus.)

2. Olkoon $a \in \mathbb{Z}$. Osoita kongruenssiluokkien avulla, että luku a^2 voidaan esittää muodossa $a^2 = 5k + r$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $r \in \{0, 1, 4\}$.

3. Olkoon $a \in \mathbb{Z}$ pariton luku. Osoita kongruenssiluokkien avulla, että $a^2 \in [1]_8$.

4. Etsi kongruenssiyhtälön $4x \equiv 5 \pmod{6}$ kaikki ratkaisut.

5. Etsi kongruenssiyhtälön $4x \equiv 8 \pmod{6}$ kaikki ratkaisut.

Määritelmä. Olkoot $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja $a, b \in \mathbb{Z}$. Luku $x_0 \in \mathbb{Z}$ on *kongruenssiyhtälöparin*

$$\begin{cases} x \equiv a & \pmod{m} \\ x \equiv b & \pmod{n} \end{cases}$$

ratkaisu, jos $x_0 \equiv a \pmod{m}$ ja $x_0 \equiv b \pmod{n}$.

6. Osoita, että edellä määritellyllä kongruenssiyhtälöparilla on ainakin yksi kokonaislukuratkaisu täsmälleen sillä ehdolla, että

$$a \equiv b \pmod{d},$$

missä $d = \operatorname{syt}(m, n)$.

7. (a) Onko kongruenssiyhtälöparilla

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \pmod{2} \\ x \equiv 2 & \pmod{3} \end{cases}$$

ratkaisuja? Jos on, keksi yksi ratkaisu.

(b) Onko kongruenssiyhtälöparilla

$$\begin{cases} x \equiv 4 & \pmod{2} \\ x \equiv 2 & \pmod{3} \end{cases}$$

ratkaisuja? Jos on, keksi yksi ratkaisu.