Lukuteoria 1
Harjoitus 7, 28.2.2018

1. Ratkaise kongruenssiyhtälö $17x \equiv 100 \pmod{67}$.
Opastus: Seuraukset 4.4.9 ja 4.4.10.

2. Osoita Fermat'n pienen lauseen avulla, että $3^{31} \equiv 3 \pmod{7}$.

3. Osoita Fermat'n pienen lauseen avulla, että $12^{772} \equiv 2 \pmod{71}$.
Opastus: Lähde liikkeelle siitä, että $772 = 10 \cdot 71 + 62$.

4. Vastaa kiinalaisen munkin Sun Zin kysymykseen: Onko lukua $x \in \mathbb{Z}$, jolle lineaariset kongruenssiyhtälöt

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

ovat totta? Jos on, mitkä luvut toteuttavat yhtälön?

5. Selvitä englanninkielisestä Wikipediasta, mikä on *twin prime* (alkulukukaksonen). Mainitse jokin tähän käsitteeseen liittyvä avoin ongelma.

6. Selvitä englanninkielisestä Wikipediasta, mikä on *Goldbach's conjecture* (Goldbachin (vahva) konjektuuri). Tarkista, että konjektuuri on totta parillisille luvuille neljästä kahteenkymmeneen.

7. Olkoot $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sellaiset luvut, että

$$\frac{p}{q} < \sqrt{7}.$$

Osoita, että

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{pq} < \sqrt{7}.$$

(Kuuluisa tehtävä!)