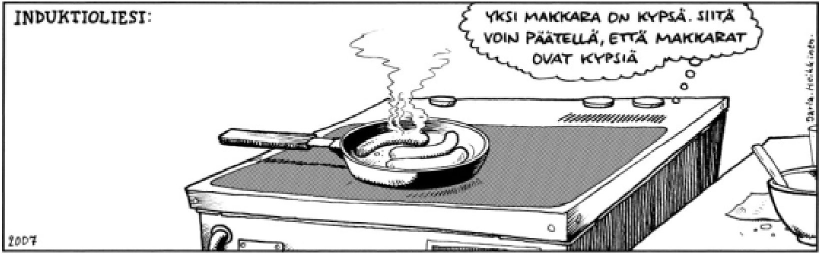
Johdatus matematiikkaan

Luento 4

Mikko Salo
7.9.2018

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ


INDUKTIOLIESI:
YKSI MAKKARA ON KYPSÄ. SIITÄ VOIN PÄÄTELLÄ, ETTÄ MAKKARAT OVAT KYPSIÄ
2007

Sisältö

1. Rationaali– ja irrationaaliluvut
2. Induktiotodistus

Rationaaliluvut

Määritelmä

Reaaliluku x on *rationaaliluku*, jos $x = \frac{m}{n}$ joillekin kokonaisluvuille m ja n, missä $n \geq 1$.

Määritelmä

Reaaliluku x on *irrationaaliluku*, jos se ei ole rationaaliluku.

Esimerkki

Luvut $\frac{7}{8}$, -2 ja $\frac{1}{100}$ ovat rationaalilukuja. Luvut $\sqrt{2}$ ja π ovat irrationaalilukuja.

Rationaaliluvut

Halutaan osoittaa, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Kerrataan:

Määritelmä

Luku $n \geq 2$ on *alkuluku*, jos se on jaollinen vain luvuilla 1 ja n.

Aritmetiikan peruslause

Jokainen kokonaisluku $n \geq 2$ voidaan kirjoittaa muodossa $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, missä $p_1, \ldots, p_k$ ovat alkulukuja.

Nyt jos $x = \frac{m}{n}$ on rationaaliluku, aritmetiikan peruslauseen nojalla m (tai $-m$) ja n ovat alkulukujen tuloja (tai ykkösiä). Supistamalla yhteiset tekijät lausekkeesta $\frac{m}{n}$ voidaan olettaa, että

$$x = \frac{k}{\ell}$$

missä kokonaisluvuilla k ja ℓ ei ole yhteisiä tekijöitä.

$\sqrt{2}$ on irrationaalinen

Lause. $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

Todistus. Tehdään vastaväite: $\sqrt{2}$ on rationaaliluku. Tällöin

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

joillekin kokonaisluvuille m ja n, joilla ei ole yhteistä tekijää. Korotetaan toiseen potenssiin ($\sqrt{2}$:n määritelmä):

$$2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Siis $m^2 = 2n^2$. Tästä seuraa että m on parillinen[1], ts. $m = 2k$ jollekin k, ja $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Tälloin $n^2 = 2k^2$ on parillinen, joten n on parillinen[1]. Siis m ja n ovat parillisia, mikä on ristiriita, sillä luvuilla m ja n ei ole yhteistä tekijää. □

[1] Perustele! (Epäsuora todistus tai aritmetiikan peruslause)

Desimaalikehitelmistä

Kysymys

Onko luku $0{,}10\,100\,1000\,10000\cdots$ rationaaliluku?

Tutkitaan yksinkertaisten rationaalilukujen desimaalikehitelmiä:

- $\frac{1}{2} = 0{,}5$
- $\frac{1}{3} = 0{,}3333333\cdots$
- $\frac{1}{4} = 0{,}25$
- $\frac{1}{5} = 0{,}2$
- $\frac{1}{6} = 0{,}1666666\cdots$
- $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\cdots$

Rationaalilukujen desimaalikehitelmät näyttävät olevan äärellisiä tai jaksollisia!

Desimaalikehitelmistä

Lause

Reaaliluku x on rationaaliluku jos ja vain jos sen desimaalikehitelmä on päättyvä tai jaksollinen jostain eteenpäin.

Lauseen nojalla $0{,}10\,100\,1000\,10000\cdots$ ei ole rationaaliluku. Lisäksi mm. desimaalikehitelmät

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$$
$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

jatkuvat loputtomasti toistamatta itseään!

Desimaalikehitelmistä

Esimerkki. Osoitetaan, että $\frac{11}{6} = 1{,}8333333\ldots$.

Koska $11 = 1 \cdot 6 + 5$ (11 jaetaan 6:lla, jakojäännös on 5),

$$\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6} = 1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{50}{6},$$
$$\frac{50}{6} = 8 + \frac{2}{6} = 8 + \frac{1}{10} \cdot \frac{20}{6},$$
$$\frac{20}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{10} \cdot \frac{20}{6}, \ \ldots$$

Saadaan

$$\frac{11}{6} = 1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{50}{6} = 1 + \frac{8}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{20}{6} = 1 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{20}{6}$$
$$= 1{,}8333333\ldots.$$

Samoin rationaaliluvun $x = \frac{m}{n}$ kehitelmä on lopulta jaksollinen (jakojäännös on $\leq n - 1$, alkaa toistua jossain vaiheessa).

Desimaalikehitelmistä

Esimerkki. Osoitetaan, että $1{,}8333333\ldots = \frac{11}{6}$.

Merkitään $x = 1{,}8333333\ldots$. Tällöin

$$100x = 183{,}333333\ldots,$$
$$10x = 18{,}333333\ldots.$$

Saadaan

$$100x - 10x = 183{,}333\ldots - 18{,}333\ldots$$

Tällöin $90x = 165$. Siis

$$x = \frac{165}{90} = \frac{5 \cdot 33}{5 \cdot 18} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}.$$

Reaaliluvuista

Olemme nähneet, että reaaliluvut jakautuvat rationaalilukuihin (esim. $\frac{7}{8}, -2$ tai $\frac{1}{100}$) ja irrationaalilukuihin (esim. $\sqrt{2}$ tai π).

Sekä rationaali- ja irrationaalilukuja on äärettömästi, mutta

- rationaalilukuja on "yhtä paljon" kuin positiivisia kokonaislukuja $(1, 2, 3, 4, \ldots)$
- irrationaalilukuja on "yhtä paljon" kuin reaalilukuja
- irrationaalilukuja on "enemmän" kuin rationaalilukuja (jotkut äärettömät ovat suurempia kuin toiset äärettömät!)

Rationaalilukuja on "huomattavasti vähemmän" kuin irrationaalilukuja, mutta nekin ovat silti "tiheässä" lukusuoralla!

Sisältö

Induktiotodistus

Tällä kurssilla esitellään seuraavat todistustekniikat:

- suora todistus
- epäsuora todistus
- induktiotodistus

Seuraavaksi käsitellään induktiotodistusta.

Induktiotodistus

Induktio on hyödyllinen periaate, jonka avulla voidaan todistaa väitteitä muotoa

$P(n)$ on tosi kaikille positiivisille kokonaisluvuille n.

Induktiotodistuksessa on kolme vaihetta:

1. **Perusaskel.** Todista väite kun $n = 1$ (ts. todista $P(1)$).
2. **Induktio-oletus.** Oleta väite todeksi tapauksessa $n = k$, missä $k \geq 1$ on mielivaltainen (ts. oleta $P(k)$).
3. **Induktioaskel.** Todista väite tapauksessa $n = k + 1$, kun oletetaan, että väite on tosi tapauksessa $n = k$ (ts. todista $P(k + 1)$).

Induktiotodistus

Induktio on validi päättelysääntö (seuraa joukko-opin aksioomista).

Induktioperiaatetta voi kuvata dominolaattajonolla. Perusaskel $P(1)$ kaataa ensimmäisen laatan. Induktioaskel $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ varmistaa, että edellinen laatta kaataa aina seuraavan.

Esimerkki 1

Väite. Kaikille $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee kun $n = 1$, sillä $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

3. Induktioaskel. Todistetaan $1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
Induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Induktioaskel on valmis. Väite seuraa induktioperiaatteen nojalla. $\square$

Esimerkki 1

Edellä todistettiin induktiolla summakaava

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tästä saadaan erityisesti

$$1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Tämä osoitettiin ensimmäisellä luennolla suoralla todistuksella (ryhmittelemällä termit pareiksi). Samalle väitteelle voi olla monia erilaisia todistuksia!

Esimerkki 2

Väite. Kaikille $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee $3 \mid n^3 - n$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee kun $n = 1$, sillä $1^3 - 1 = 0$, ja 0 on jaollinen luvulla 3 (sillä $0 = 3 \cdot 0$).

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että $3 \mid k^3 - k$.

3. Induktioaskel. Todistetaan, että $3 \mid (k+1)^3 - (k+1)$. Nyt

$$(k+1)^2(k+1) - (k+1) = (k^2 + 2k + 1)(k+1) - (k+1)$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - (k+1) = k^3 - k + 3k^2 + 3k.$$

Induktio-oletuksen nojalla $k^3 - k = 3m$ jollekin m. Saadaan

$$(k+1)^3 - (k+1) = 3m + 3k^2 + 3k = 3(m + k^2 + k).$$

Siis $3 \mid (k+1)^3 - (k+1)$. Tämä todistaa väitteen. $\square$

Esimerkki 3 (Bernoullin epäyhtälö)

Väite. Jos $x > -1$, niin $(1+x)^n \geq 1 + nx$ kaikille $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee kun $n = 1$, sillä $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$.

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että $(1+x)^k \geq 1 + kx$.

3. Induktioaskel. Todistetaan, että $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$.

Nyt

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k.$$

Koska $x > -1$, pätee $1 + x > 0$. Induktio-oletuksen nojalla

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Siis $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$. Tämä todistaa väitteen. $\square$

Esimerkki 3

Bernoullin epäyhtälöstä seuraa esimerkiksi, että kaikilla $n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Tiedetään, että

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2{,}71828182845\ldots.$$

kun $n \to \infty$.

Induktiotodistus

Yleisiä huomioita induktiosta:

- Induktioaskel on usein todistuksen työläin vaihe. Se voi vaatia induktio-oletuksen lisäksi muita argumentteja.
- Induktion voi aloittaa tapauksesta $n = n_0$, missä $n_0 \geq 1$ (esim. $n_0 = 2$). Tällöin väite saadaan kaikille $n \geq n_0$.
- Induktiolla voi olla helppoa todistaa kaavoja, joita ei aina ole helppo löytää (esim. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)! Erikoistapaukset (pienet n) voivat auttaa kaavan löytämisessä.

Vahva induktio

Vahvalla induktioperiaatteella voi myös todistaa väitteitä

$$P(n) \text{ on tosi kaikille } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vahva induktiotodistus käsittää kolme vaihetta:

1. **Perusaskel.** Todista väite kun $n = 1$ (ts. todista $P(1)$).
2. **Induktio-oletus.** Oleta väite todeksi tapauksessa $n \leq k$ (ts. oleta $P(1), P(2), \ldots, P(k)$).
3. **Induktioaskel.** Todista väite tapauksessa $n = k + 1$, kun oletetaan, että väite on tosi tapauksessa $n \leq k$ (ts. todista $P(k + 1)$).

Vahva induktioperiaate seuraa tavallisesta induktiosta (miksi?).

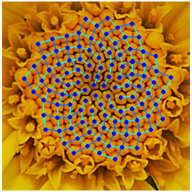
Fibonaccin luvut

Fibonaccin luvut F_n (vuodelta 1202) määritellään kaavalla

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Fibonaccin lukuja: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Fibonaccin lukuja esiintyy monissa yhteyksissä (kombinatoriikka, Hilbertin 10. ongelma, tietorakenteet, taloustiede). Niitä voidaan havaita myös erilaisissa luonnossa esiintyvissä kuvioissa (mm. kukintojen rakenne) .



Vahva induktio

Väite. $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

Todistus. Todistetaan väite vahvalla induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee kun $n = 1$ ja $n = 2$, sillä

$$\frac{(1+\sqrt{5})^1-(1-\sqrt{5})^1}{2^1\sqrt{5}} = 1,$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \frac{(1+2\sqrt{5}+5)-(1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = 1.$$

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että

$$F_l = \frac{(1+\sqrt{5})^l-(1-\sqrt{5})^l}{2^l\sqrt{5}}, \qquad l \leq k.$$

Vahva induktio

3. Induktioaskel. Määritelmä ja induktio-oletus antavat

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{2(1+\sqrt{5})^k - 2(1-\sqrt{5})^k + 4(1+\sqrt{5})^{k-1} - 4(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(4+2(1+\sqrt{5}))(1+\sqrt{5})^{k-1} - (4+2(1-\sqrt{5}))(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+2\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-2\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$