MATP100 Johdatus matematiikkaan
Harjoitus 1, 7.9.2018

Ei laskimia!

1. (a) Osoita, että
$$\frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,003} < \frac{3}{1\,000\,000}.$$
(b) Osoita yleisemmin, että jos n on positiivinen kokonaisluku, niin
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} < \frac{3}{n^2}.$$

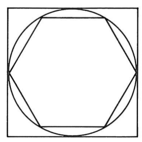
2. (a) Osoita, että $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 195 + 197 + 199 = 10\,000$.
(b) Löydätkö lausekkeen summalle $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1)$, kun n on positiivinen kokonaisluku? (Ei tarvitse todistaa tarkasti.)

3. Todista, että $\sqrt[7]{7!} > \sqrt[6]{6!}$

4. Osoita, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n pätee
$$\frac{n}{n+2} < \frac{n+2}{n+4}$$

5. (*) Osoita, että $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$

6. Todista, että $3 < \pi < 4$, missä π määritellään seuraavasti: $\pi = \frac{\text{ympyrän kehän pituus}}{\text{ympyrän halkaisijan pituus}}$.
(*Vihje.* Hyödynnä viereistä kuvaa.)



7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että $3n^2+7n+2$ on parillinen.
(*Vihje.* Jaa osatapauksiin, joissa n on parillinen/pariton.)

8. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Todista huolellisesti, että mn on pariton täsmälleen silloin kun sekä m että n ovat parittomia.

9. (*) Todista, että $(1 + \frac{1}{6})^6 < 6$

10. (*) Olkoon $n \geq 2$ parillinen luku. Jos $n \times n$ ruudukosta (shakkilaudasta) poistetaan kaksi vastakkaista kulmaruutua, osoita, että saatua ruudukkoa ei voi peittää 2×1 suorakaiteilla (ilman että ne menevät päällekkäin).