MATP100 Johdatus matematiikkaan

Harjoitus 3, 14.09.2018

1. Todista seuraavat väitteet induktiolla:
(a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ kaikille $n \geq 1$.
(b) $n! > 2^n$ kaikille $n \geq 4$.
(c) Jos $a \neq 1$ on reaaliluku, niin
$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad \text{kaikille } n \geq 1.$$

2. Kirjoita seuraavat kompleksiluvut muodossa $a + bi$ joillekin reaalisille a, b:
(a) $(1 + 5i) + (-2 + 3i)$
(b) $(2 - i)(1 + 4i)$
(c) $(3 - 4i)^2$
(d) $(1 + i)^3$

3. Etsi seuraavien yhtälöiden kompleksiarvoiset ratkaisut, ja tarkista sijoittamalla yhtälöön että nämä todella ovat ratkaisuja:
(a) $z^2 + 9 = 0$
(b) $z^2 + z + 1 = 0$

4. Etsi kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $z + i = 2(1 - \bar{z})$.

5. *Kultainen leikkaus* on luku $\ell > 1$, jolle pätee seuraavaa: kun $\ell \times 1$ suorakulmiosta poistetaan 1×1 neliö, jäljelle jäävä suorakulmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa. Osoita, että $\ell^2 = \ell + 1$, ja etsi lauseke luvulle ℓ. (*Vihje.* Katso kääntöpuolella oleva kuva.)

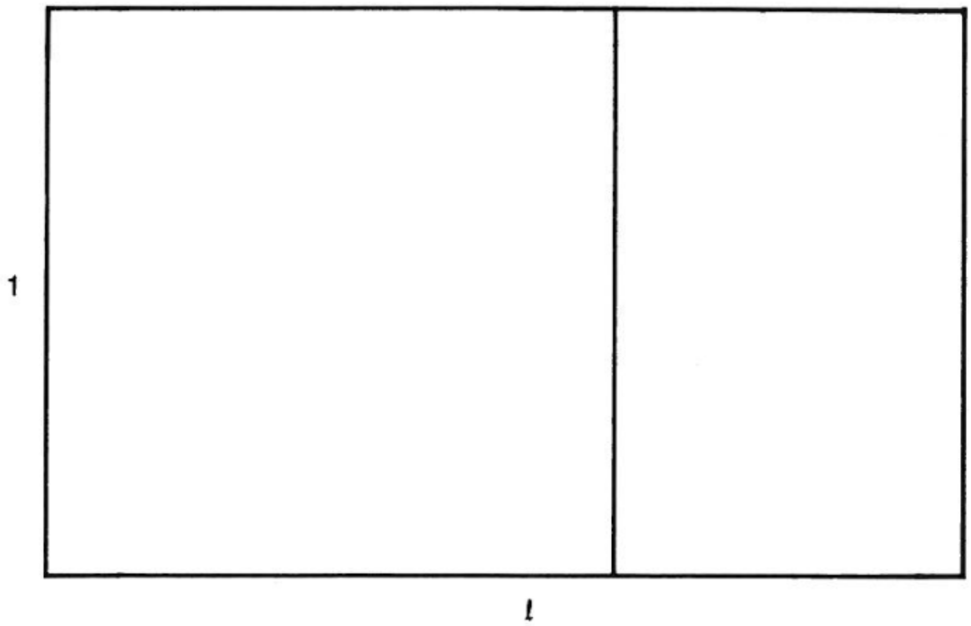
6. (*) Olkoon $\ell > 1$ edellisessä tehtävässä esiintynyt luku (*kultainen leikkaus*). Osoita induktiolla, että $\ell^n = F_n\ell + F_{n-1}$ kaikille $n \geq 2$, missä F_n ovat luennoilla esiintyneet Fibonaccin luvut.

7. (*) Määritellään $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$, kun $z = a + bi$ on kompleksiluku ja a, b ovat reaalilukuja. Osoita, että kaikilla kompleksiluvuilla z, w pätee:
(a) $e^{z+w} = e^z e^w$, (b) $e^z \neq 0$, (c) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

8. (*) Olkoot a, b reaalilukuja, joille pätee $a < b$. Osoita, että avoimella välillä $]a, b[$ on jokin rationaaliluku.[1] (*Vihje.* Epäsuora todistus. Lisäapua löytyy Juutisen Johdatus matematiikkaan –luentomonisteesta (Lause 2.3.23).)

Käännä!

[1] Avoin väli $]a, b[$ koostuu niistä reaaliluvuista x, joille $a < x < b$.


1
l