

MATP100 Johdatus matematiikkaan

Ylimääräisiä tehtäviä tenttiin valmistautumista varten

- Osoita, että $\frac{1}{1001} - \frac{1}{1002} < \frac{1}{1000000}$.
- Osoita, että $\sqrt{1001} - \sqrt{1000} < \frac{1}{2\sqrt{1000}}$.
(*Vihje.* Kerro vasen puoli lausekkeella $\frac{\sqrt{1001} + \sqrt{1000}}{\sqrt{1001} + \sqrt{1000}}$.)
- Jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, onko $n^2 - 1$ jaollinen luvulla 8? Perustele vastaus.
- Voiko positiivisen kokonaisluvun neliö olla muotoa $4\ell + 3$, missä ℓ on kokonaisluku? Perustele vastaus.
- Osoita kolmioepäyhtälön avulla, että kaikille reaaliluvuille a, b, c pätee $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.
- Todista seuraavat väitteet induktiolla:
 - $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ kaikille $n \geq 1$.
 - $5 \mid n^5 - n$ kaikille $n \geq 2$.
- Olkoon $z = 2 + 3i$. Esitä seuraavat kompleksiluvut muodossa $a + bi$ joillekin reaaliluvuille a ja b :
 - z^2
 - $2z - 3\bar{z}$
 - $z^3 - z + i$
- Osoita määritelmää käyttäen, että kahden kompleksiluvun z ja w tulolle pätee $zw = wz$.
- Olkoot $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| < 2\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 - 4 < 21\}$. Määritä joukot $A \cup B$, $A \cap B$, ja $A \setminus B$.
- Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{a, b, c\}$. Anna esimerkki jostain funktiosta $f : A \rightarrow B$, joka ei ole injektio eikä surjektio.
- (*) Osoita, että jos $2^n - 1$ on alkuluku, niin n on alkuluku. (*Vihje.* Epäsuora todistus, käytä kaavaa $x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \dots + y^{m-1})$.)
- (*) Olkoot a, b, c reaalilukuja, joille $a, b, c \geq 0$. Osoita, että
 - $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$,
 - $8abc \leq (a + b)(b + c)(a + c)$.