MATP100 Johdatus matematiikkaan
Ylimääräisten tehtävien ratkaisuehdotuksia

1. Osoita, että $\frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}$.

Esitetään tehtävälle kaksi hieman erilaista ratkaisua.
Ratkaisutapa 1. Lähdetään sieventämään epäyhtälön vasenta puolta:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,002} &= \frac{1\,002}{1\,001\cdot 1\,002} - \frac{1\,001}{1\,001\cdot 1\,002}\\ &= \frac{1\,002-1\,001}{1\,001\cdot 1\,002}\\ &= \frac{1}{1\,001\cdot 1\,002}.\end{aligned}$$

Nyt $1\,001 > 1\,000$ ja $1\,002 > 1\,000$, joten $1\,001\cdot 1\,002 > 1\,000\,000$. Siis

$$\frac{1}{1\,001\cdot 1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

Tämä todistaa, että $\frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}$.

Ratkaisutapa 2. Käytetään ekvivalenssinuolta:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1\,001} - \frac{1}{1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}\\ \iff\quad & \frac{1\,002}{1\,001\cdot 1\,002} - \frac{1\,001}{1\,001\cdot 1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}\\ \iff\quad & \frac{1\,002-1\,001}{1\,001\cdot 1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}\\ \iff\quad & \frac{1}{1\,001\cdot 1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}.\end{aligned}$$

Viimeinen väite on totta, sillä $1\,001 > 1\,000$ ja $1\,002 > 1\,000$, joten $\frac{1}{1\,001\cdot 1\,002} < \frac{1}{1\,000\,000}$. Alkuperäinen väite saadaan, kun seurataan ekvivalenssinuolia takaperin.

2. Osoita, että $\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}}$.
(*Vihje.* Kerro vasen puoli lausekkeella $\frac{\sqrt{1\,001}+\sqrt{1\,000}}{\sqrt{1\,001}+\sqrt{1\,000}}$.)

Ratkaisu. Käytetään ekvivalenssinuolta:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}} \\
\iff\quad &\frac{(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})(\sqrt{1\,001} + \sqrt{1\,000})}{\sqrt{1\,001} + \sqrt{1\,000}} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}} \\
\iff\quad &\frac{(\sqrt{1\,001})^2 + \sqrt{1\,001}\sqrt{1\,000} - \sqrt{1\,000}\sqrt{1\,001} - (\sqrt{1\,000})^2}{\sqrt{1\,001} + \sqrt{1\,000}} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}} \\
\iff\quad &\frac{1\,001 - 1\,000}{\sqrt{1\,001} + \sqrt{1\,000}} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}} \\
\iff\quad &\frac{1}{\sqrt{1\,001} + \sqrt{1\,000}} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000}}.
\end{aligned}$$

Viimeinen väite on totta, sillä $\sqrt{1\,001} + \sqrt{1\,000} > \sqrt{1\,000} + \sqrt{1\,000} = 2\sqrt{1\,000}$.

3. Jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, onko $n^2 - 1$ jaollinen luvulla 8? Perustele vastaus.

Ratkaisu. Kokeillaan ensin pieniä arvoja $n = 1, 3, 5, 7$ ja huomataan, että kaikilla näillä arvoilla $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8. Todistetaan nyt, että $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8 aina kun $n \geq 1$ on pariton.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ on pariton. Tällöin $n = 2k + 1$ jollekin kokonaisluvulle $k \geq 0$. Binomin neliökaavaa käyttämällä huomataan, että

$$\begin{aligned}
n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 - 1 = 4k^2 + 4k \\
&= 4k(k + 1).
\end{aligned}$$

Siis $n^2 - 1$ on jaollinen ainakin luvulla 4. Osoitetaan, että $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8 jakamalla tarkastelu kahteen osatapaukseen (k parillinen ja k pariton).

Osatapaus 1. Oletetaan, että k on parillinen. Tällöin $k = 2\ell$ jollekin kokonaisluvulle ℓ. Saadaan, että

$$n^2 - 1 = 4k(k + 1) = 8\ell(2\ell + 1).$$

Siis $n^2 - 1 = 8m$ missä $m = \ell(2\ell + 1)$ on kokonaisluku, joten $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8.

Osatapaus 2. Oletetaan, että k on pariton. Tällöin $k = 2\ell + 1$ jollekin kokonaisluvulle ℓ. Saadaan, että

$$n^2 - 1 = 4k(k + 1) = 4(2\ell + 1)(2\ell + 2) = 8(2\ell + 1)(\ell + 1).$$

Siis $n^2 - 1 = 8m$ missä $m = (2\ell + 1)(\ell + 1)$ on kokonaisluku, joten $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8.

Molemmissa osatapauksissa $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8, joten väite on totta.

4. Voiko positiivisen kokonaisluvun neliö olla muotoa $4\ell+3$, missä ℓ on kokonaisluku? Perustele vastaus.

Ratkaisu. Kokeilemalla tapauksia $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ huomataan, että näissä tapauksissa kokonaisluvun neliö ei ole muotoa $4\ell + 3$. Todistetaan nyt, että jos $n \geq 1$, niin n^2 ei voi olla muotoa $4\ell + 3$ missä ℓ on kokonaisluku.

Käytetään epäsuoraa todistusta ja tehdään **vastaoletus**: on olemassa kokonaisluku $n \geq 1$, jolle $n^2 = 4\ell + 3$ jollekin kokonaisluvulle ℓ. Jaetaan tarkastelu kahteen osatapaukseen riippuen siitä, onko n parillinen vai pariton.

Osatapaus 1. Oletetaan, että n on parillinen. Tällöin $n = 2m$ jollekin kokonaisluvulle m. Nyt $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$, ja yhtälöstä $n^2 = 4\ell + 3$ saadaan, että

$$4m^2 = 4\ell + 3.$$

Tämän nojalla $4m^2 - 4\ell = 3$, ja jakamalla luvulla 4 nähdään, että

$$m^2 - \ell = \frac{3}{4}.$$

Tämä on ristiriita, sillä $m^2 - \ell$ on kokonaisluku, mutta $\frac{3}{4}$ ei ole kokonaisluku.

Osatapaus 2. Oletetaan, että n on pariton. Tällöin $n = 2m + 1$ jollekin kokonaisluvulle m. Nyt $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, ja yhtälöstä $n^2 = 4\ell + 3$ saadaan, että

$$4m^2 + 4m + 1 = 4\ell + 3.$$

Tämän nojalla $4m^2 + 4m - 4\ell = 2$, ja jakamalla luvulla 4 nähdään, että

$$m^2 + m - \ell = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Tämä on ristiriita, sillä $m^2 + m - \ell$ on kokonaisluku, mutta $\frac{1}{2}$ ei ole kokonaisluku.

Molemmissa osatapauksissa päädyttiin ristiriitaan. Siis vastaoletuksen täytyy olla väärä, ja väite on todistettu.

5. Osoita kolmioepäyhtälön avulla, että kaikille reaaliluvuille a, b, c pätee $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

Ratkaisu. Kolmioepäyhtälö sanoo, että kaikille reaaliluvuille x, y, z pätee

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Valitaan $x = a - b$ ja $y = b - c$. Tällöin $x + y = (a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$, joten kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

6. Todista seuraavat väitteet induktiolla:
(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ kaikille $n \geq 1$.
(b) $5 \mid n^5 - n$ kaikille $n \geq 2$.

Ratkaisu.
(a) Todistetaan väite induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee tapauksessa $n = 1$, sillä $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$.

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

3. Induktioaskel. Täytyy osoittaa, että

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k+1) \cdot (k+1+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)}{3}.$$

Induktio-oletuksen nojalla vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k+1) \cdot (k+1+1) \\
&= [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k+1)] + (k+1) \cdot (k+2) \\
&= \left[\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right] + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Induktioaskel on valmis, ja alkuperäinen väite seuraa induktioperiaatteen nojalla.

(b) Todistetaan väite induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee tapauksessa $n = 2$, sillä $2^5 - 2 = 32 - 2 = 30 = 6 \cdot 5$, mikä on jaollinen luvulla 5.

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että $5 | k^5 - k$. Tämä tarkoittaa, että $k^5 - k = 5\ell$ jollekin kokonaisluvulle ℓ.

3. Induktioaskel. Täytyy osoittaa, että

$$5 | (k+1)^5 - (k+1).$$

Lähdetään sieventämään lauseketta $(k+1)^5 - (k+1)$ käyttämällä binomin neliökaavaa ja kertomalla sulkuja auki:

$$\begin{aligned}
&(k+1)^5 - (k+1) \\
&= (k+1)^2(k+1)^2(k+1) - (k+1) \\
&= (k^2+2k+1)(k^2+2k+1)(k+1) - (k+1) \\
&= (k^4+4k^3+6k^2+4k+1)(k+1) - (k+1) \\
&= (k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1) - (k+1) \\
&= k^5 + 5(k^4+2k^3+2k^2+k) - k.
\end{aligned}$$

Viimeisellä rivillä esiintyy induktio-oletuksen lauseke $k^5 - k$. Induktio-oletuksen nojalla $k^5 - k = 5\ell$ jollekin kokonaisluvulle ℓ. Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 - k + 5(k^4+2k^3+2k^2+k) \\
&= 5\ell + 5(k^4+2k^3+2k^2+k).
\end{aligned}$$

Siis $(k+1)^5 - (k+1) = 5m$, missä $m = \ell + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k$ on kokonaisluku. Tämä osoittaa, että $5|(k+1)^5 - (k+1)$. Induktioaskel on valmis, ja alkuperäinen väite seuraa induktioperiaatteen nojalla.

7. Olkoon $z = 2+3i$. Esitä seuraavat kompleksiluvut muodossa $a+ib$ joillekin reaalisille a ja b:
(a) z^2
(b) $2z - 3\bar{z}$
(c) $z^3 - z + i$

Ratkaisu.
(a) Saadaan

$$z^2 = (2+3i)(2+3i) = 2\cdot 2 + 2(3i) + (3i)2 + (3i)(3i) = 4 + 6i + 6i + 9i^2.$$

Nyt $i^2 = -1$, joten $z^2 = 4+6i+6i-9 = -5+12i$.

(b) Saadaan

$$2z - 3\bar{z} = 2(2+3i) - 3(2-3i) = 4+6i-(6-9i) = 4-6+6i+9i = -2+15i.$$

(c) Kohdassa (a) saatiin $z^2 = -5+12i$. Nyt

$$z^3 = z^2 \cdot z = (-5+12i)(2+3i) = -10-15i+24i+36i^2 = -10-36-15i+24i = -46+9i.$$

Siis saadaan

$$z^3 - z + i = -46+9i-(2+3i)+i = -46-2+9i-3i+i = -48+7i.$$

8. Osoita määritelmää käyttäen, että kahden kompleksiluvun z ja w tulolle pätee $zw = wz$.

Ratkaisu. Kompleksiluvut z, w voidaan kirjoittaa muodossa $z = (a, b)$ ja $w = (c, d)$, missä a, b, c, d ovat reaalilukuja. Määritelmän mukaan kompleksilukujen z ja w tulo on

$$zw = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Toisaalta saman määritelmän mukaan

$$wz = (c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, cb + da).$$

Nyt $ac - bd = ca - db$ ja $ad + bc = cb + da$, joten $zw = wz$.

9. Olkoot $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| < 2\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 - 4 < 21\}$. Määritä joukot $A \cup B$, $A \cap B$, ja $A \setminus B$.

Ratkaisu. Määritetään ensin joukot A ja B. Nyt $|x-4| < 2$ jos ja vain jos $x = 4+y$ missä $|y| < 2$. Siis

$$A = \{4 + y : -2 < y < 2\} =]2, 6[.$$

(Kannattaa piirtää joukko A lukusuoralle.) Joukon B tapauksessa huomataan, että $0 < x^2 - 4 < 21$ jos ja vain jos $4 < x^2 < 25$. Funktion $y = x^2$ kuvaajaa tarkastelemalla nähdään seuraavaa: jos oletetaan, että $x \geq 0$, niin neliöjuuret ottamalla saadaan

$$4 < x^2 < 25 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 < x < 5.$$

Jos taas oletetaan, että $x < 0$, niin saadaan

$$4 < x^2 < 25 \quad \Longleftrightarrow \quad -5 < x < -2.$$

Siis

$$B = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2 \text{ tai } 2 < x < 5\} =]-5, -2[\cup]2, 5[.$$

(Kannattaa piirtää joukko B lukusuoralle.)

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\} \\
&=]-5, -2[\cup]2, 6[, \\
A \cap B &= \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\} \\
&=]2, 5[, \\
A \setminus B &= \{x : x \in A \text{ mutta } x \notin B\} \\
&= [5, 6[.
\end{aligned}$$

(Kannattaa piirtää nämäkin joukot lukusuoralle.)

10. Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{a, b, c\}$. Anna esimerkki jostain funktiosta $f : A \to B$, joka ei ole injektio eikä surjektio.

Ratkaisu. Eräs vastaus on funktio $f : A \to B$, joka määritellään seuraavasti:

$$f(1) = a, \quad f(2) = a, \quad f(3) = b, \quad f(4) = b.$$

Funktio f ei ole injektio, sillä esimerkiksi alkioilla 1 ja 2 on sama kuva a. Funktio f ei ole myöskään surjektio, sillä alkio $c \in B$ ei ole minkään joukon A alkion kuva.

(Toinen mahdollinen vastaus olisi vakiofunktio $f : A \to B$, jolle $f(j) = a$ kaikille $j \in A$.)

11. (*) Osoita, että jos $2^n - 1$ on alkuluku, niin n on alkuluku. (*Vihje.* Epäsuora todistus, käytä kaavaa $x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots + y^{m-1})$.)

Ratkaisu. Oletetaan, että $2^n - 1$ on alkuluku. Käytetään epäsuoraa todistusta ja tehdään **vastaväite**: n ei ole alkuluku. Tällöin n on yhdistetty luku, joten $n = k\ell$ joillekin kokonaisluvuille $k \geq 2$ ja $\ell \geq 2$. Nyt annetun kaavan nojalla

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{k\ell} - 1 = (2^k)^\ell - (1^k)^\ell \\ &= (2^k - 1)((2^k)^{\ell-1} + (2^k)^{\ell-2} \cdot 1^k + \ldots + (1^k)^{\ell-1}). \end{aligned}$$

Erityisesti $2^n - 1 = mr$, missä $m = 2^k - 1$ ja $r = (2^k)^{\ell-1} + (2^k)^{\ell-2} \cdot 1^k + \ldots + (1^k)^{\ell-1}$ ovat kokonaislukuja. Mutta nyt $m \geq 2$ (sillä $k \geq 2$) ja $r \geq 2$ (sillä $k \geq 2$ ja $\ell \geq 2$). On siis osoitettu, että $2^n - 1$ on yhdistetty luku. Tämä on ristiriita sen oletuksen kanssa, että $2^n - 1$ on alkuluku. Väite on todistettu.

12. (*) Olkoot a, b, c reaalilukuja, joille $a, b, c \geq 0$. Osoita, että
(a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$,
(b) $8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c)$.

Ratkaisu. Käytetään luennoilla esiintynyttä aputulosta: jos x ja y ovat reaalilukuja, niin

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

(Tämä todistettiin seuraavasti: reaaliluvuille pätee aina $(x-y)^2 \geq 0$, joten binomin neliökaavan nojalla $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Aputulos seuraa tästä.)

(a) Aputuloksesta saadaan kolme epäyhtälöä

$$\begin{aligned} 2ab &\leq a^2 + b^2, \\ 2ac &\leq a^2 + c^2, \\ 2bc &\leq b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Laskemalla nämä kolme epäyhtälöä yhteen saadaan, että

$$2ab + 2ac + 2bc \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

Väite seuraa jakamalla luvulla 2.

(b) Koska $a, b, c \geq 0$, aputulosta voidaan käyttää lukuihin $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$. Näin saadaan kolme epäyhtälöä

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a}\sqrt{b} &\leq a + b, \\ 2\sqrt{a}\sqrt{c} &\leq a + c, \\ 2\sqrt{b}\sqrt{c} &\leq b + c. \end{aligned}$$

Kertomalla nämä kolme epäyhtälöä keskenään (tämä on sallittua, sillä kaikki luvut ovat ei-negatiivisia) saadaan

$$8(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2 \leq (a+b)(a+c)(b+c).$$

Väite seuraa tästä.