

MATA200 Kompleksilaskenta
Harjoitustehtävät 2, ke 29.5.2019

Sivulla 2 on yksikköympyrä, jota voi käyttää apuna argumenttien määrittämisessä.

1. Laske kompleksiluvun $z = (\sqrt{3} - i)^5$ moduli ja argumentti. Mikä on luvun z napakoordinaattiesitys? Mikä on kompleksiluvun i/z eräs argumentti?

2. Laske $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$.

3. Ratkaise yhtälö $z^5 = -8$. Piirrä kuva, josta käy ilmi juurten sijainti kompleksitasossa.

4. Olkoon $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ja $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Laske $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$. Näytä, että z_1 on binomiyhtälön $z^3 = z_1z_2z_3$ eräs ratkaisu eli juuri.

Vihje: H1/5

5. Suoran yhtälö kompleksisessa muodossa on $\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$, missä $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $c \in \mathbb{R}$.

(a) Esitä kompleksisessa muodossa suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $-4i$ ja 1 kautta.

(b) Olkoon $z = 1 - 4i$ ja $w = 2 - i$. Piirrä kuva, jossa ovat (a)-kohdan suora sekä luvut z , w , \bar{z} , \bar{w} , $1/w$ ja zw .

6. Piirrä ja kuvaile geometrisesti seuraavien ehtojen määrittelemät kompleksitason osajoukot.

(a) $1 \leq |z| < 2$

(b) $|2z - i| = 1$

(c) $|\operatorname{Arg}(z)| < \pi/4$

(d) $|z - 4| > |z|$.

7. Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja $a \neq 0$. Tarkastellaan kuvausta $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(a) Osoita, että $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on bijektio.

(b) Milloin käänteisfunktio $f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on kiertokuvaus?

(c) Mikä tason joukko on kuvajoukko $f(S(0, 1))$?

8. Olkoon $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 7iz + 2 + i$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

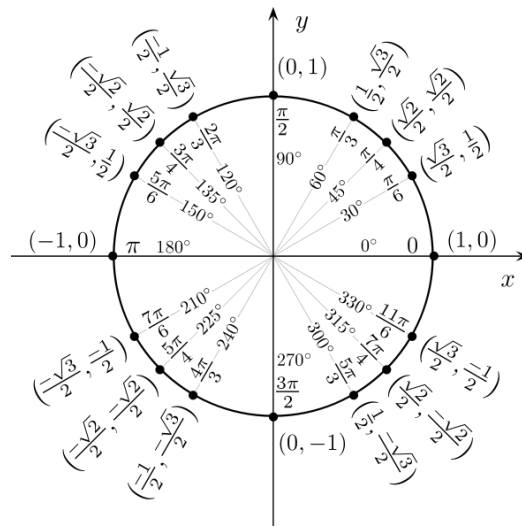
(a) Kirjoita f muodossa $T \circ M \circ R$, missä T on siirto-, M on venytys- ja R on kiertokuvaus.

(b) Mikä on kuvajoukko $f(S(0, 1))$? Voit tehdä tämän vaiheittain kohdan (a) avulla.

9. Selvitä luentomonisteesta, miten kompleksinen eksponenttifunktio \exp määritellään ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

(a) Mihin eksponenttifunktio kuvaa joukon $\{2 + iy : y \in \mathbb{R}\}$? Piirrä kuvajoukko.

(b) Mihin eksponenttifunktio kuvaa joukon $\{x - \frac{\pi}{4}i : x \in \mathbb{R}\}$? Piirrä kuvajoukko.



KUVA 1. Yksikköympyrä (Gustavb, Wikipedia Commons, Lisenssi CC BY-SA 3.0)