

MATA200 Kompleksilaskenta
Harjoitus 3, 5.6.2018

Sivulla 2 on yksikköympyrä, jota voi käyttää apuna argumenttien määrittämisessä.

1. Ratkaise yhtälö

$$z^8 = 1.$$

2. Mitkä ovat luvun $-1 - i\sqrt{3}$ moduli ja argumentti? Ratkaise yhtälö

$$z^2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

3. Selvitä funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{3z - i}{z + 1}, \quad z \in A,$$

luonnollinen määrittelyjoukko $A \subset \mathbb{C}$ (eli milloin rationaalifunktio on määritelty) ja laske derivaatta $f'(z)$, kun $z \in A$.

4. Tarkastellaan polynomia $P(z) = z^5 - iz^4 - z + i$. Etsi kompleksiluvut z_1, \dots, z_5 siten, että

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5), \quad \text{kun } z \in \mathbb{C}.$$

Vihje 1: Onko $z = i$ yksi juurista? Vihje 2: Jakokulma

5. Olkoon $u(z) = \sin(x) + e^y + xy$ kaikilla kompleksitason pisteillä $z = x + iy$. Laske osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Laske myös osittaisderivaattojen arvot origossa $\frac{\partial u}{\partial x}(0)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}(0)$.

6. Olkoon $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$ kaikilla $z \neq 0$.

- (a) Mitkä ovat funktion f reaali- ja imaginaariosat?
(b) Missä pisteissä Cauchy–Riemannin yhtälöt toteutuvat?

7. Olkoon $f(z) = x^2 + iy^2$ kaikilla kompleksitason pisteillä $z = x + iy$.

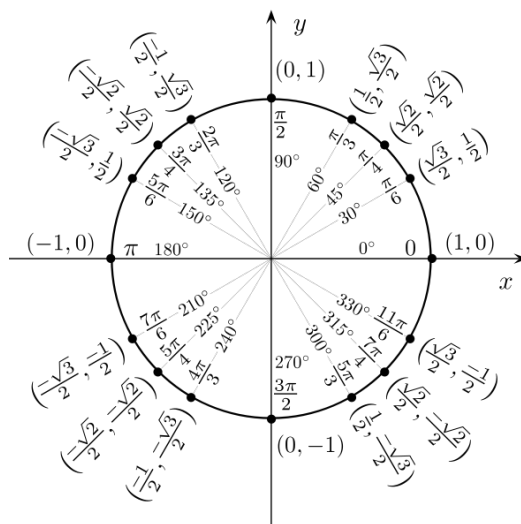
- (a) Mitkä ovat funktion f reaali- ja imaginaariosat?
(b) Missä pisteissä $z \in \mathbb{C}$ derivaatta $f'(z)$ on olemassa? Laske derivaatta, kun se on olemassa.

Tehtävässä saa olettaa tarvittavat jatkuvuudet.

- (c) Onko f analyyttinen missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$?

8. Laske raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h^2 + ih}.$$



KUVA 1. Yksikköympyrä (Gustavb, Wikipedia Commons, Lisenssi CC BY-SA 3.0)