

**MATA200 Kompleksilaskenta**  
**Harjoitus 4, 12.6.2019**

1. Olkoon  $z = 2 + i3\pi$  ja  $w = -1 + i2\pi$ . Laske

- (a)  $e^z/e^w$
- (b)  $\arg(e^z e^w)$
- (c)  $|e^{z+w}|$
- (d)  $e^z - e^{z+4\pi i}$ .

2. Kohdissa (a)–(c) laske  $\log(z)$  ja  $\text{Log}(z)$

- (a)  $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- (b)  $z = e^{2019}$
- (c)  $z = e^{2019+4\pi i}$

3. Missä kompleksitason joukoissa seuraavat funktiot ovat derivoituvia? Derivoi niissä pisteissä, missä se on mahdollista.

(a)  $\exp(z^{2019})$ ,      (b)  $\text{Log}(z^2 + 1)$ ,      (c)  $\sin(\exp(z^2 + 2z + 1))$ .

4. Minkälainen käyrä on suoran  $y = x$  kuva eksponenttifunktiossa  $\exp$ ? Hahmottele kuva.

5. Millä kompleksiluvuilla  $z \in \mathbb{C}$  pätee  $\cos(z) = 0$ ?

Vihje: Toisen asteen yhtälö  $\zeta$ :lle, missä  $\zeta = e^{iz}$ .

6. (a) Jos määritellään yleinen potenssifunktio logaritmin tapaan moniarvoisena funktiona eli  $z^a = \exp(a \log z)$ , niin mikä on potenssi  $i^i$ ?

(b) Olkoon  $\sqrt{w}$  neliöjuuren päähaara eli  $\sqrt{w} = |w|^{1/2} e^{i \text{Arg}(w)/2}$ . Mille kompleksiluvuille  $z \neq 0$  pätee  $\sqrt{z^2} = z$ ?

7. Olkoon  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ , kun  $t \in [0, 1]$ . Laske

(a)  $\int_{\gamma} |z| dz$ ,      (b)  $\int_{\gamma} (z - 1) dz$ ,      (c)  $\int_{\gamma} |z - 1| |dz|$ .

8. Laske integraali

$$\int_{\gamma} (ze^z + \cos(z)) dz,$$

kun  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  on paloittain säännöllinen polku siten, että  $\gamma(a) = 0$  ja  $\gamma(b) = 1$ .

Vihje: Integraalifunktio