

MATA200 Kompleksilaskenta
Harjoitus 5, 19.6.2019

1. Määritä paloittain säännöllinen polku γ , joka parametrisoi seuraavat joukot annetulla suunnistuksella.

(a) Yksikköympyrän kaari pisteestä -1 pisteeseen 1 ylemmässä puolitasossa eli $\text{Im}(\gamma(t)) \geq 0$.

(b) Kolmion, jonka kärkipisteet ovat 0 , 3 ja $3 + 4i$, reuna positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään).

2. Laske integraali

$$\int_{\gamma} z \text{Im}(z) dz,$$

kun γ on kohdassa 1(b) määritelty paloittain säännöllinen polku.

Onko funktiolla $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = z \text{Im}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, koko tasossa määriteltyä integraalifunktiota?

3. Laske integraali

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + 2}{z} dz$$

kun $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + Re^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$, ja

(a) $R = \frac{1}{2}$

(b) $R = 2$.

4. Laske integraali

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(z^2)}{2z - 1} dz,$$

kun $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 4e^{it}$.

5. Laske integraali

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz$$

kun $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$.

6. Selvitä funktion f erikoispisteet, kun

(a) $f(z) = \frac{z - i}{(z^2 + 1)(z + i)}$,

(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z - 1)}$,

(c) $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z - i)^2}$.