MATA200 Kompleksilaskenta
Harjoitus 6, maanantaina 24.6.2019

1. Vastaa kurssikyselyyn.

2. Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$ kaikilla $t \in [0,1]$. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{z-i}{(z^2+1)(z+i)}\,dz.$$

Vihje: H5/6

3. Olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$ kaikilla $t \in [0,2\pi]$. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz.$$

Vihje: H5/6

4. Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$ kaikilla $t \in [0,1]$. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\,dz.$$

Vihje: H5/6

5. Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}+\cos(t)}.$$

6. Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}.$$

7. Käytä kohdassa (a) kompleksisen eksponenttifunktion ominaisuuksia ja binomiyhtälöä

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad \text{missä } a,b \in \mathbb{C}.$$

(a) Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\cos(3t) = 4(\cos(t))^3 - 3\cos(t)$.

(b) Näytä, että kulmaa $\pi/3$ ei voi jakaa harpilla ja (merkitsemättömällä) viivoittimella kolmeen yhtä suureen osaan.

Voit pitää tunnettuna seuraavat tosiasiat.

1. Jos kulman $\pi/3$ voi jakaa kolmeen yhtäsuureen osaan harpilla ja viivoittimella, niin $\cos(\pi/9)$ on toisen asteen polynomin nollakohta. Lisäksi kyseisen polynomin kertoimet ovat rationaalilukuja.

2. Jos polynomin $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ kertoimet $a_j, j = 0,1,2,\ldots,n$, ovat kokonaislukuja ja $a_n \neq 0 \neq a_0$, niin polynomilla on rationaalijuuri $x_0 = p/q$, jos ja vain jos $a_n = mq$ ja $a_0 = kp$ joillain kokonaisluvuilla m ja k. Edellä x_0:ssa p ja q ovat kokonaislukuja ja esitystä p/q ei voi sieventää eli $\mathrm{syt}(p,q) = 1$.