Kvanttimekaniikka I A (FYSA231), Kevät 2010

Harj 3.

1. Kahdesta samanlaisesta vuorovaikuttamattomasta hiukkasesta (k=1,2) muodustuvan järjestelmän Hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad \hat{H}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_k^2 + V(\vec{r}_k).$$

Yksittäisen hiukkasen ominaisarvoyhtälö on

$$\hat{H}_k \phi_{n_k}(\vec{r}_k) = E_{n_k}\phi_{n_k}(\vec{r}_k).$$

Näytä, että $\hat{H}$:n ominaistilat ovat

$$\phi_{n_1 n_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_{n_1}(\vec{r}_1)\phi_{n_2}(\vec{r}_2),$$

ja ominaisarvot

$$E_{n_1 n_2} = E_{n_1} + E_{n_2}.$$

2. Yksiulotteisen harmoonisen värähtelijän Schrödingerin yhtälö on

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

tee skaalausmuunnos $x = by$, missä $b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ ja käytä merkintää $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$ ja muokkaa diffrentiaaliyhtälö muotoon

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\epsilon - y^2)\phi = 0,$$

missä $\psi(x) = \psi(by) = \phi(y)$.
Tee yrite

$$\phi = f(y)e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

ja johda yhtälöksi

$$f'' - 2f'y + (\epsilon - 1)f = 0,$$

joka on niin sanottu Hermiten diffrentiaaliyhtälö.

3. Jatkoa edelliseen. Tee Frobeniuksen menetelmän mukainen ratkaisuyrite

$$f(y) = y^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

ja johda palautuskaava

$$a_{n+2}(n+s+2)(n+s+1) = a_n(2n + 2s - \epsilon + 1)$$

4. a) Ratkaistessasi palautuskaavaa havaitsit, että $s = 0$ ja $a_1 = 0$ on eräs mahdollisuus. Sijoita tämä palautuskaavaan. Osoita, että suurilla n:n arvoilla
$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \approx \frac{2}{n}.$$
Osoita, että e^{y^2} käyttäytyy samoin. Käytä tässä e^{y^2}:n sarjakehitelmää. Tästä voidaan päätellä, että f(y) ja edelleen $\phi(y)$ hajoaa kun $y \to \infty$.
   b) Sarjan täytyy katketa, jotta aaltofunktio on normittuva. Johda tästa lauseke energioille.

5. a) Kirjoita näkyviin kvanttimekaanisen harmoonisen värähtelijän perustilan aaltofunktio ja energia.
   b) Potentiaali muuttuu äkisti siten, että aaltofunktio pysyy samana, mutta taajuus ω muuttuu 2ω:ksi. Energia mitataan saman tien. Osoita että vanhan perustilan energia ei ole enää mahdollinen.
   c) Millä todennäkoisyydellä saadaan arvo $\hbar\omega$ uudessa systeemissä?