Kvanttimekaniikka I A (FYSA231), Kevät 2010

Harj 4.

1. $\mathbf{U}$ on mielivaltainen unitaarimatriisi.
   a) Osoita, että $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$.
   b) Osoita että, jos $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger$, niin $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}'\mathbf{U}$.
   c) Osoita että $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$.
   d) Osoita, että, jos $\mathbf{A}$ on hermiittinen niin silloin myös $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger$ on hermiittinen.
2. Olkoon $\hat{H}$ Hamiltonin operaattori ja $\hat{A}$ jotain observaabelia vastaava operaattori. Ja olkoon $\{\mid 1\rangle, \mid 2\rangle, \mid 3\ \rangle\ \}$ systeemin ortonormitettu kanta. Määritä operaattoreiden $\hat{H}$ ja $\hat{A}$ matriisiesitykset, kun seuraavat pätee $\hat{H}$:lle ja $\hat{A}$:lle
$$\begin{cases} \hat{H} \mid 1\rangle = \hbar\omega \mid 1\rangle, \\ \hat{H} \mid 2\rangle = 2\hbar\omega \mid 2\rangle, \\ \hat{H} \mid 3\rangle = 3\hbar\omega \mid 3\rangle, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{A} \mid 1\rangle = \lambda \mid 2\rangle, \\ \hat{A} \mid 2\rangle = \lambda \mid 1\rangle, \\ \hat{A} \mid 3\rangle = 2\lambda \mid 3\rangle. \end{cases}$$
   Määritä $\hat{A}$:n ominaisarvot ja normitetut ominaisvektorit. Esitä $\hat{H}$ $\hat{A}$:n kannassa.
3. Yksiulotteinen harmooninen värähtelijä on perustilassa. Tällöin sen energia ja normitettu aaltofunktio on
$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega,\ \ \psi_0 = (\pi b^2)^{-1/4} e^{(\frac{-x^2}{2b^2})}.$$
   missä $b^2 = \hbar/(m\omega)$.
   a) Laske potentiaalienergian ja liike-energian odotusarvot.
   b) Laske keskipoikkeamien tulo $\Delta x \Delta p$ ja kommentoi tulosta epämääräisyysperiatteen perusteella.
   c) Laske x:n todennäköisin arvo.
4. Tilat $\phi_1(\vec{r})$ ja $\phi_2(\vec{r})$ ovat Hamiltonin operaattorin ortonormitettuja ominaistiloja. Observaabelilla A ei ole ekpslisiittistä aikariippuvuutta, $A \neq A(t)$. Järjestelmä on normitetussa tilassa
$$\psi(t, \vec{r}) = c_1\phi_1(\vec{r})e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2\phi_2(\vec{r})e^{-iE_2 t/\hbar}.$$
   Käytä merkintöjä
$$\hbar\omega = E_1 - E_2,\ \ A_{mn} = \int \phi_m^* \hat{A}\phi_n d^3r.$$
   ja määritä odotusarvo $\langle A\rangle_t$. Osoita, että odotusarvo värähtelee ääriarvojen välillä jaksolla
$$T = \frac{2\pi\hbar}{|E_1 - E_2|}.$$

5. a) Osoita, että $[\hat{x}^n, \hat{p}] = i\hbar n x^{n-1}$

b) Osoita yksihiukkas-Hamiltonin operaattorin ja

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{A}]\rangle,$$

avulla, että

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m},$$

ja

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\langle\frac{dV(x)}{dx}\rangle.$$

Vihje: $V(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$