Kvanttimekaniikka I A (FYSA231), Kevät 2010

Harj 5.

1. Vetyatomin perustilan normitettu aaltofunktio on

$$\psi(\vec{r}) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0},$$

Laske r:n todennäköisin arvo. Vertaa tulosta harj. 4/4 tehtävän tulokseen. Ja myös 2/5 tulokseen. Mitä huomaat?

2. Osoita Diracin delta-funktion määritelmän $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x) f(x) = f(0)$ avulla seuraavat delta-funktion ominaisuudet
   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x-a) f(x) = f(a)$
   b) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x\delta(x) f(x) = 0.$
   c) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \text{ kun } a \neq 0.$
   d) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta'(x) f(x) = -f'(0).$
3. Tarkastellaan 2-tilasysteemin aikakehitystä ja observaabelien mittausarvojen todennäköisyyksien laskemista. Olkoot $|1\rangle$ ja $|2\rangle$ systeemia kuvaavat ortonormaalit tilavektorit. Systeemin Hamiltonin operaattori on seuraava:

$$\begin{aligned} \hat{H}|1\rangle &= \; -E|1\rangle \\ \hat{H}|2\rangle &= \; E|2\rangle. \end{aligned}$$

Olkoot systeemissä lisäksi observaabeli A ja sitä vastaava operaattori $\hat{A}$, jolle

$$\begin{aligned} \hat{A}|1\rangle &= \; -i\hbar|2\rangle \\ \hat{A}|2\rangle &= \; i\hbar|1\rangle. \end{aligned}$$

   a) Mitataan systeemin energia hetkella $t = 0$ ja saadaan tulokseksi $-E$. Tämän jälkeen energia mitataan uudestaan hetkellä $t = \frac{\pi\hbar}{3E}$. Mitkä ovat mahdolliset tulokset ja millä todennäköisyyksillä?
   b) Mitataan A hetkellä $t = 0$ ja saadaan tulokseksi $\hbar$. Tämän jälkeen energia mitataan hetkellä $t = \frac{\pi\hbar}{3E}$. Mitkä ovat mahdolliset tulokset ja millä todennäköisyyksillä?
   c) Mitataan A hetkellä $t = 0$ ja saadaan tulokseksi $\hbar$. Tämän jälkeen A mitataan uudestaan hetkellä $t = \frac{\pi\hbar}{3E}$. Mitkä ovat mahdolliset tulokset ja millä todennäköisyyksillä?
   d) Onko A liikevakio?

4. Potentiaali $V(x)$ määritellään seuraavasti

$$V(x) = \begin{cases} 0, \ kun \ x \leq 0, \\ -V_0, \ kun \ 0 < x < L \\ 0, \ kun \ L \leq x. \end{cases}$$

Hiukkassuihku kulkee x-akselin suuntaisesti. Oleta tulevaksi aalloksi $\phi = Ae^{ikx}$.

a) Muodosta yhtälöt eri osa-aaltojen amplitudien ratkaisemiseksi.

b) Johda heijastuneen aallon amplitudiksi

$$A_2 = e^{iqL} \frac{2i(q^2 - k^2)\sin(qL)}{(q+k)^2 - (q-k)^2 e^{2iqL}},$$

missä $\hbar^2 k^2/(2m) = E$ ja $\hbar^2 q^2/(2m) = E + V_0$

5. Jatkoa tehtävään 4.

a) Johda heijastuskertoimen lauseke

$$R = \frac{(q^2 - k^2)^2 \sin^2(qL)}{4q^2k^2 + (q^2 - k^2)^2 \sin^2(qL)},$$

b) Käytä merkintöjä $k^2L^2 = \varepsilon$ ja $(q^2 - k^2)L^2 = \varepsilon_0$, jolloin $E = (\hbar^2/(2mL^2))\varepsilon$ ja $V_0 = (\hbar^2/(2mL^2))\varepsilon_0$ ja johda läpäisykertoimen lauseke

$$T = \frac{4(\varepsilon_0 + \varepsilon)\varepsilon}{4(\varepsilon_0 + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon_0^2 \sin^2(\sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon})},$$

c) Mitkä ovat T:n raja-arvot kun $\varepsilon \to 0$ ja $\varepsilon \to \infty$? Vastaavatko ne odotuksiasi?

d) Ota $\varepsilon_0 = 100$ ja $\varepsilon = 0 - 300$ ja piirrä T:n kuvaaja ε:n funktiona.