$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H},\hat{A}]\rangle}$$

Jos observaabelilla A ei aikariippuvuutta $\left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle = 0$

kvanttimekaanisille liikevakioille $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = 0$ eli odotusarvot säilyvät

eli kvanttimekaanista liikevakiota vastaavalle operaattorille $\hat{A}$ (ajasta riippumaton, $\frac{\partial A}{\partial t}=0$) pätee

$$\boxed{[\hat{H},\hat{A}] = 0}$$

eli $\hat{A}$:lla on yhteiset ominaistilat $\hat{H}$:n kanssa ja voidaan mitata samanaikaisesti E:n kanssa.

8.0 Paikka- ja liikemääräesitykset

muista kommutaatio säännöt $[\hat{x},\hat{y}] = [\hat{y},\hat{z}] = [\hat{z},\hat{x}] = 0$
→ yhteiset ominaistilat

$$\begin{cases} \hat{x}\,|\bar{x}\rangle = x\,|\bar{x}\rangle \\ \hat{y}\,|\bar{x}\rangle = y\,|\bar{x}\rangle \\ \hat{z}\,|\bar{x}\rangle = z\,|\bar{x}\rangle \end{cases}$$

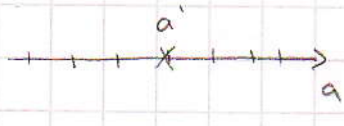
paikka operaattorin spektri on jatkuva

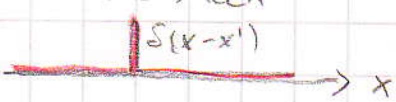
Yleistetään: $\sum_a |a\rangle\langle a| = \hat{\mathbb{1}} \longrightarrow \boxed{\int d^3x\, |\bar{x}\rangle\langle\bar{x}| = \hat{\mathbb{1}}}$
(täydellisyysrelaatio)

$\langle a|a'\rangle = \delta_{aa'} \longrightarrow \boxed{\langle\bar{x}|\bar{x}'\rangle = \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\cdot\delta(z-z')}$
(ortonormitus)

Kroneckerin δ ⟶ Diracin δ-funktio

poimii yhden diskreetin arvon — kaikki x-mahdollisia, poimii niistä yhden





8.1 Diracin delta-funktio

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) F(x)\, dx = F(a)}$$ määrittelee 1-dim. δ-funktion

erityisesti $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1}$$ eli $a=0$ ja $F(x)=1$

Delta-funktiolle useita esityksiä:

1°
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{kun } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$ HT.

2°
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}, \quad \delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

3°
$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-nx^2}, \quad \delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Yleistys 3-dim $\delta^{(3)} = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

$$\boxed{\int_{\text{koko avaruus}} \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}_0) F(\bar{x})\, dx = F(\bar{x}_0)}$$

Esitys:

$$\boxed{\delta^{(3)}(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p\, e^{i/\hbar\, \bar{p}\cdot\bar{x}}}$$

8.2 Yhteys aaltofunktioihin

$\langle \bar{x} | \Psi(t) \rangle = \Psi(t, \bar{x})$ oli jo aiemmin

ts. $\langle \Psi_1(t) | A | \Psi_2(t) \rangle = \int d^3x\, d^3x' \langle \Psi_1(t) | \bar{x} \rangle \langle \bar{x} | A | \bar{x}' \rangle \langle \bar{x}' | \Psi_2(t) \rangle$

$$= \int d^3x \int d^3x'\, \Psi_1(t, \bar{x})\, \underbrace{A(\bar{x}, \bar{x}')}_{\uparrow \text{ matriisielementti}}\, \Psi_2(t, \bar{x}')$$

Jos $A(\bar{x}, \bar{x}')$ ei riipu aaltofunktion arvoista kahdessa paikassa $\boxed{\hat{A}(\bar{x}, \bar{x}') = \hat{A}(\bar{x})\, \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') = \hat{A}(\bar{x}')\, \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}')}$

eli $\boxed{\langle \Psi_1(t) | A | \Psi_2(t) \rangle = \int d^3x\, \Psi_1(t, \bar{x})\, \hat{A}(x)\, \Psi_2(t, \bar{x})}$

8.3 Liikemääräesitys

$\boxed{\hat{\bar{p}} | \bar{p} \rangle = \bar{p} | \bar{p} \rangle}$

$\hat{\bar{p}}$ = liikemääräoperaattori
$\bar{p}$ = ominaisarvo
$|\bar{p}\rangle$ = ominaistila

* kommutaattorit $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_z] = [\hat{p}_x, \hat{p}_z] = 0$

* täydellisyysrelaatio $\boxed{\hat{\mathbb{1}} = \int d^3p\, |\bar{p}\rangle \langle \bar{p}|}$

* ortonormitus $\boxed{\langle \bar{p} | \bar{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}')}$

Mitä on $\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle$? Merk. $\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle = f_{\bar{p}}(\bar{x})$

$\langle \bar{x} | \hat{\bar{p}} | \bar{p} \rangle = \bar{p} \langle \bar{x} | \bar{p} \rangle = \bar{p} f_{\bar{p}}(\bar{x})$ (★)

Toisaalta

$$\langle \bar{x} | \hat{\bar{p}} | \bar{p} \rangle = \int d^3x'\, \underbrace{\langle \bar{x} | \hat{\bar{p}} | \bar{x}' \rangle}_{-i\hbar \nabla_x \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}')} \underbrace{\langle \bar{x}' | \bar{p} \rangle}_{f_{\bar{p}}(\bar{x}')} = -i\hbar \nabla_x \underbrace{\int d^3x'\, \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') f_{\bar{p}}(\bar{x}')}_{f_{\bar{p}}(\bar{x})}$$

$$= -i\hbar \nabla_x f_{\bar{p}}(\bar{x}) \quad (★★)$$

$(\star) + (\star\star)$ $\qquad -i\hbar\nabla_x f_p(\bar{x}) = \bar{p} f_p(\bar{x})$

$$\rightarrow \underline{f_p(\bar{x}) = A\, e^{+\frac{i}{\hbar}\bar{x}\cdot\bar{p}}}$$

Normitus $\quad \langle \bar{p} | \bar{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\bar{p}-\bar{p}') \qquad A = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$

$$\boxed{\langle \bar{x} | p \rangle = f_p(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{+i/\hbar\, \bar{x}\cdot\bar{p}}}$$

Ei saadaan:

$$\langle \bar{p} | \psi \rangle = \langle \bar{p} | \int d^3x\, |\bar{x}\rangle\langle \bar{x} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x\, \langle x | p \rangle^* \psi(\bar{x})$$

$$\boxed{\langle \bar{p} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x\, e^{-i/\hbar\, \bar{x}\cdot\bar{p}}\, \psi(\bar{x})}$$

Fourier muunnos
$F(\psi(x))$

vastaavasti

$$\boxed{\langle \bar{x} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p\, e^{+i/\hbar\, \bar{x}\cdot\bar{p}}\, \psi(\bar{p})}$$

Fourier käänteismuunnos
$F^{-1}(\psi(\bar{p}))$

Eli

$\psi(\bar{p})$ saadaan $\psi(\bar{x})$:istä, $\quad \psi(\bar{p}) = F(\psi(\bar{x}))$

$\psi(\bar{x})$ saadaan $\psi(\bar{p})$:istä $\quad \psi(\bar{x}) = F^{-1}(\psi(\bar{p}))$

todennäköisyystulkinta ei muutu

8.4 Minimiaaltopaketti

Heisenbergin epätarkkuusrelaatio $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$

Onko olemassa tila jossa "=" saavutetaan?

On ja tätä kutsutaan minimiaaltopaketiksi.

Palataan todistukseen:

$$(\Delta A)(\Delta B) \overset{①}{\geq} \frac{1}{4}\left| \langle\psi|\hat{n}|\psi\rangle + i\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle \right|^2 \overset{②}{\geq} \frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2$$

$$\hat{n} = \hat{A}'\hat{B}' + \hat{B}'\hat{A}' \qquad i\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

① Milloin "=" jos $\hat{B}'|\psi\rangle = \alpha \hat{A}'|\psi\rangle$ $\alpha \in \mathbb{C}$ vakio

Nyt $\langle\psi|\hat{n}|\psi\rangle = \langle\hat{A}'\psi|\hat{B}'\psi\rangle + \langle\hat{B}'\psi|\hat{A}'\psi\rangle$

$$= \alpha\langle\hat{A}'\psi|\hat{A}'\psi\rangle + \alpha^*\langle\hat{A}'\psi|\hat{A}'\psi\rangle$$

$$\overset{\text{normitus!}}{=} \alpha + \alpha^* = 2\,\mathrm{Re}(\alpha)$$

② $\langle n\rangle = 0$ $\qquad \alpha = ia \quad a \in \mathbb{R}.$

Nyt: laitetaan $\hat{A} = \hat{x}$ $\quad \hat{B} = \hat{p}$

$$(\hat{p} - \langle p\rangle)|\psi\rangle = ia(\hat{x} - \langle x\rangle)|\psi\rangle \qquad | \cdot \langle x| \to$$

$$\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - \langle p\rangle\right)\psi(x) = ia\,(x - \langle x\rangle)\,\psi(x)$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{i}{\hbar}\left[ia(x - \langle x\rangle) + \langle p\rangle\right]dx$$

ratk...

$$\psi(x) = D\, e^{-\frac{a}{2\hbar}(x - \langle x\rangle)^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle(x)}$$

vakio

$$= C\, e^{-\frac{a}{2\hbar}(x - \langle x\rangle)^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle(x - \langle x\rangle)} \qquad \text{merk. } \frac{a}{2\hbar} = \frac{1}{4b^2} \geq 0$$

$$\psi(x) = C\, e^{-\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{4b^2} + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle\langle x - \langle x\rangle)}$$

$1 = \langle\psi|\psi\rangle$ Normitus $|C|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b}$ val. $C \in \mathbb{R}$

eli
$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b}}\; e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4b^2} + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle(x-\langle x\rangle)}}$$

on minimiaaltopaketti x-esityksessä

Fourier muunnos $\psi(p) = F[\psi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\,\psi(x)\,dx$

$$\boxed{\psi(p) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\hbar}{2b}}}\; e^{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{2(\hbar/2b)}}}$$

minimiaaltopaketti p-esityksessä

9 Sirontaongelma ja vapaa hiukkanen

Oli

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_E(x) = E\,\psi_E(x)$$

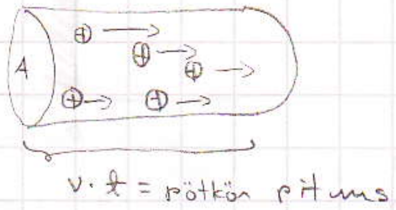
$$\psi_E''(x) + k^2\psi_E(x) = 0 \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi_E = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$ oli yleinen ratk. (Tasoaalto)

Huomataan
- (i) $\psi_E(x)$ ei normitu $\int dx\,|\psi_E|^2 \longrightarrow \infty$ $\quad p = \hbar k$
- (ii) $\psi_E(x)$ on liikemäärän ominaistila $\hat{p}\,e^{ikx} = p\,e^{ikx}$
- (iii) Liikemäärän ominaisfunktiot toteuttavat δ-funktionormituksen
- (iv) $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ei diskreettiä E spektriä sillä $p = \hbar k$ jatkuva

Uusi tulkinta: ψ edustaa hiukkassuihkun voimakkuutta

Analogia sähkövirtaan



virrantiheys $\rho = \frac{\text{varaus}}{\text{tilavuus}}$

pötkössä varausta $Avt\rho$

Ajassa t ohi menee $\frac{Avt\rho}{t} = jA$

virrantiheys

eli: $j = v\rho$ ← hiukkaset/tilavuus

3d: $\vec{j} = \vec{v}\rho$

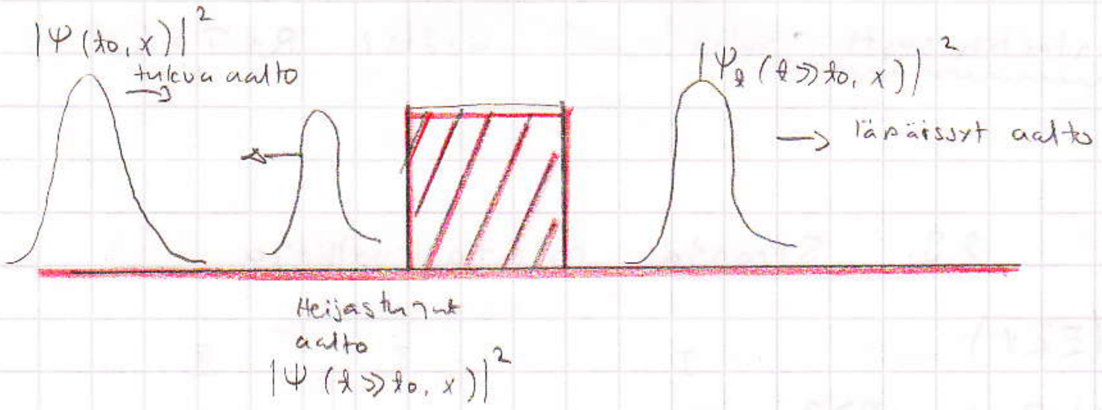
Hiukkasten nopeus

Eli nyt $|\psi|^2 \overset{\text{vakio}}{=} |A|^2$ vastaa j:tä

$p = \hbar k$ ja $p = mv$ $\longrightarrow$ $v = \frac{\hbar k}{m}$

Eli $\boxed{j = \frac{\hbar k}{m}|A|^2}$

9.1 Sirontaongelman määrittely



Merkintöjä

j_I	=	tuleva aalto
j_R	=	Heijastunut aalto
j_T	=	Läpäissyt aalto

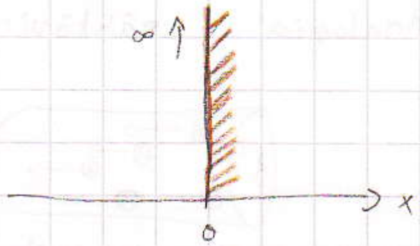
Heijastuskerroin: $R = \frac{j_R}{j_I}$

Läpäisykerroin: $T = \frac{j_T}{j_T}$

Tutkitaan asiaa esimerkein.

9.2. Sironta äärettömästä seinämästä

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \infty & , x > 0 \end{cases}$$



tilassa $x < 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \overbrace{V(x)}^{=0}\psi = 0$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \qquad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$$

$$\psi = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\substack{\text{lähestyvä aalto} \\ + \text{ suuntaan} \\ \rightarrow}} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\substack{\text{heijastunut aalto} \\ - \text{ suuntaan} \\ \leftarrow}}$$

tilassa $x \geq 0$ $\quad \psi = 0$ aina kerroin $C = |\psi|^2 = 0$

ψ jva $\quad A + B = 0$ eli $A = -B$

siis $\quad \underline{R} = \frac{j_R}{j_I} = \frac{\frac{\hbar k}{m}|B|^2}{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} = \underline{1}$

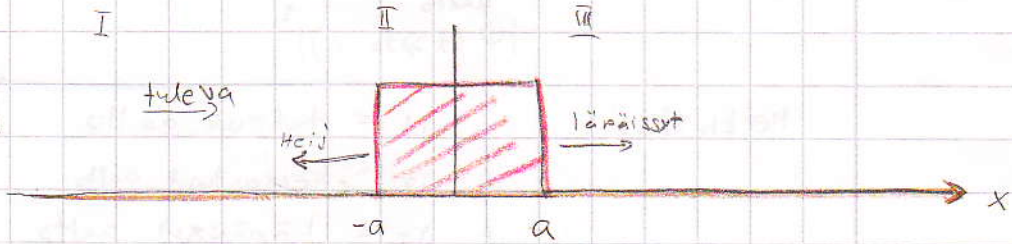
$$\underline{T = 0}$$

intuitiivisesti selvä! $\qquad$ Lisäksi $R + T = 1$

9.3. Sironta potentiaalivallista

$(E < V)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } |x| > a \\ V_0 & \text{kun } |x| \leq a \end{cases}$$



$\underline{x \leq -a}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = \underbrace{A_1 e^{+ikx}}_{\text{tuleva}} + \underbrace{A_2 e^{-ikx}}_{\text{heijastunut}}$$

$a \leq x$

$$\psi = \underset{\text{läpäisssyt}}{C_1 e^{ikx}} + \cancel{C_2 e^{-ikx}}$$

(Vain yksi suihku neg → pos. siis ei pos → neg)

$-a < x < a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0\psi = E\psi \qquad \varkappa = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

$$\psi'' - \varkappa^2\psi = 0 \qquad \text{(vrt. aiemmin } q = \dots)$$

(Madl. s. 33)

$$\psi = B_1 e^{-\varkappa x} + B_2 e^{+\varkappa x}$$

Eli

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} & x < -a \quad (\mathrm{I}) \\ B_1 e^{-\varkappa x} + B_2 e^{\varkappa x} & -a \leq x \leq a \quad (\mathrm{II}) \\ C_1 e^{ikx} & x > a \quad (\mathrm{III}) \end{cases}$$

reunaehdot ψ ja ψ' jatkuvia

ψ $x = a$
$$B_1 e^{-\varkappa a} + B_2 e^{\varkappa a} = C_1 e^{ika} \qquad (1)$$

ψ' $x = a$
$$-\varkappa B_1 e^{-\varkappa a} + B_2 \varkappa e^{\varkappa a} = ikC e^{ika} \qquad (2)$$

$$(1) \times \varkappa - (2) \longrightarrow 2B_1 \varkappa e^{-\varkappa a} = (\varkappa - ik) C e^{ika}$$

$$B_1 = \frac{1}{2\varkappa}(\varkappa - ik) e^{(ik+\varkappa)a} \qquad (3)$$

$$(1) \times \varkappa + (2) \longrightarrow 2B_2 \varkappa e^{\varkappa a} = (\varkappa + ik) e^{ika}$$

$$B_2 = \frac{1}{2\varkappa}(\varkappa + ik) e^{(ik-\varkappa)a} \qquad (4)$$

ψ $x = -a$:
$$A_1 e^{-ika} + A_2 e^{+ika} = B_1 e^{+\varkappa a} + B_2 e^{-\varkappa a} \qquad (5)$$

ψ' $x = -a$:
$$A_1 ik e^{-ika} - A_2 ik e^{ika} = -\varkappa B_1 e^{\varkappa a} + \varkappa B_2 e^{-\varkappa a} \qquad (6)$$

5 ik + 6

$$2ikA_1 e^{-ika} = B_1(ik-\varkappa)e^{\varkappa a} + B_2(ik+\varkappa)e^{-\varkappa a}$$ ← sij 3 & 4

$$= \frac{1}{2\varkappa} e^{ika}\left[(\varkappa - ik) C e^{\varkappa a}(ik-\varkappa)e^{\varkappa a} + (\varkappa+ik) C e^{-\varkappa a}(ik+\varkappa)e^{-\varkappa a}\right]$$

$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$= \frac{1}{2\varkappa} e^{ika} C\left[(\varkappa ik + k^2 + ik\varkappa - \varkappa^2)e^{2\varkappa a} + (\varkappa ik + \varkappa^2 - k^2 + ik\varkappa)e^{-2\varkappa a}\right]$$

$$= \frac{1}{2\varkappa} e^{ika} C\left[2\varkappa ik\underbrace{(e^{2\varkappa a} + e^{-2\varkappa a})}_{2\cdot\cosh(2\varkappa a)} + (k^2-\varkappa^2)\underbrace{(e^{2\varkappa a} - e^{2\varkappa a})}_{2\cdot\sinh(2\varkappa a)}\right]$$

eli
$$\frac{C}{A_1} = \frac{2ik\varkappa}{2\varkappa ik\cosh(2\varkappa a) + (k^2-\varkappa^2)\sinh(2\varkappa a)} e^{-i2kA}$$

$$= \frac{2k\varkappa}{2\varkappa k\cosh(2\varkappa a) - i(k^2-\varkappa^2)\sinh(2\varkappa a)} e^{-i2kA}$$

josta

$$\text{Läpäisykerroin} = T = \left|\frac{C}{A_1}\right|^2 = \frac{(2k\varkappa)^2}{(2\varkappa k)^2 + (k^2+\varkappa^2)^2\sinh^2(2\varkappa a)} \neq 0$$ Huom!

sillä
$$(2\varkappa k)^2\overbrace{\cosh^2(2\varkappa a)}^{1+\sinh^2(2\varkappa a)} \overset{-i\cdot i = +1}{+} (k^2-\varkappa^2)^2\sinh^2(2\varkappa a)$$

$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

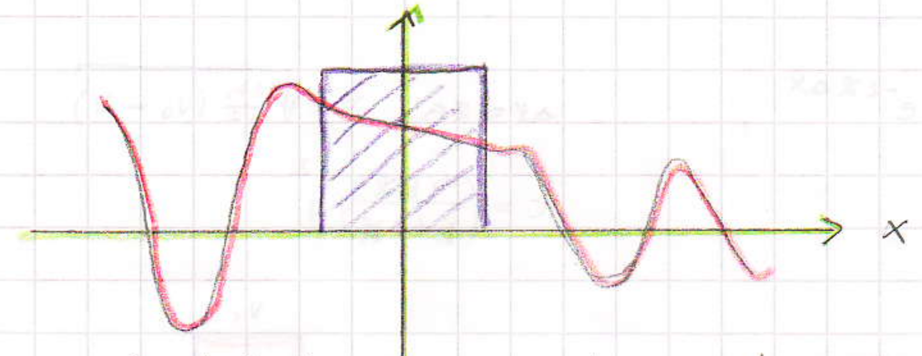
$$= (2\varkappa k)^2 + \sinh^2(2\varkappa a)\left[\underbrace{4\varkappa^2k^2 + k^4 - 2k^2\varkappa^2\ \varkappa^4}_{(k^2+\varkappa^2)^2}\right]$$

Vastaavasti voidaan laskea $R = \left|\frac{A_2}{A_1}\right|^2 = \frac{(k^2+\varkappa^2)^2\sinh^2(2a\varkappa)}{(k^2+\varkappa^2)^2\sinh^2(2a\varkappa) + (2k\varkappa)^2}$

(jätetään harrastuksen varaan)

Mutta tyydytään vain toteamaan että saman tuloksen saa $\boxed{T + R = 1} \Rightarrow R = 1 - T$

Kuvaiks Mod s. 35



Mitä rajalla $E = V$?   sij. $k^2a^2 = \varepsilon$
$\varkappa^2 a^2 = \varepsilon_0 - \varepsilon$

$$T = \frac{4\varepsilon(\varepsilon_0-\varepsilon)}{4\varepsilon(\varepsilon_0-\varepsilon) + \varepsilon^2 \sinh^2(2\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon})}$$

$\sinh x \approx x$ jos x pieni

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} T = \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} \frac{4\varepsilon(\varepsilon_0-\varepsilon)}{4\varepsilon(\varepsilon_0-\varepsilon)+\varepsilon^2 4(\varepsilon_0-\varepsilon)} = \frac{1}{1+\varepsilon_0}$$

$$R = \frac{(\varepsilon+\varepsilon_0-\varepsilon)^2 \sinh^2(2\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon})}{(\varepsilon+\varepsilon_0-\varepsilon)^2\sinh^2(2\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon})+4\varepsilon(\varepsilon_0-\varepsilon)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} R = \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0^2\, 4(\varepsilon_0-\varepsilon)}{\varepsilon_0^2 4(\varepsilon_0-\varepsilon)+4\varepsilon(\varepsilon_0-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+1}$$

Edelleen $R + T = 1$ ok

Vastaavasti voi laskea tapauksen $E > V$.
Demoissa ehkä joku sironta tähän tyyliin.

9.4 WKB approksimaatio
(Wenzel, Kramers, Brillouin)

Oli edellä

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{(2k\varkappa)^2}{(2\varkappa k)^2 + (k^2+\varkappa^2)^2 \sinh^2(2\varkappa a)} \longrightarrow \left[\frac{4k\varkappa}{k^2+\varkappa^2}\right]^2 e^{-4\varkappa L}$$

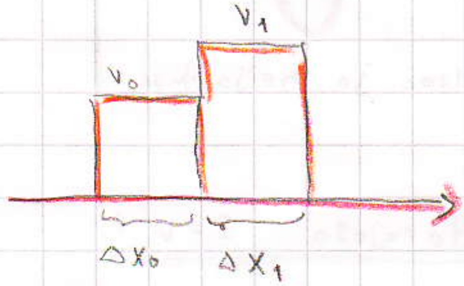
jos nyt $\varkappa a \gg 1$ $\quad \sinh^2(2\varkappa a) = \left[\frac{1}{2}\left(e^{2\varkappa a} - e^{-2\varkappa a}\right)\right]^2 \to \frac{1}{4} e^{4\varkappa a}$

Eli

$$T = C\, e^{-2\varkappa \Delta x}, \qquad \Delta x = 2a, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

$$C = \left(\frac{4k\varkappa}{k^2 + \varkappa^2}\right)^2$$

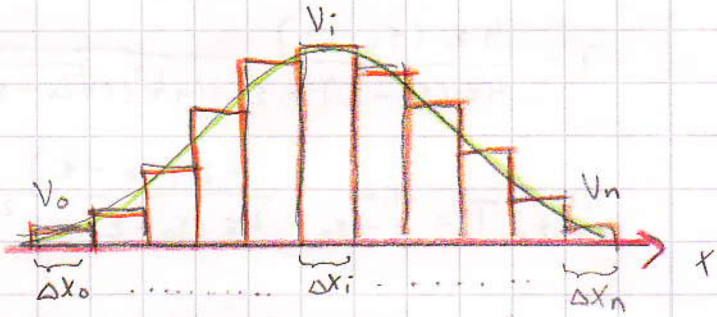
Jos monta vallia peräkkäin



$$T = T_0 \cdot T_1 \sim e^{-2\Delta x_0 \varkappa_0} \cdot e^{-2\Delta x_1 \varkappa_1}$$

$$= e^{-2(\Delta x_0 \varkappa_0 + \Delta x_1 \varkappa_1)}$$

Yleisesti mv. valli korvataan pylväillä



jolloin

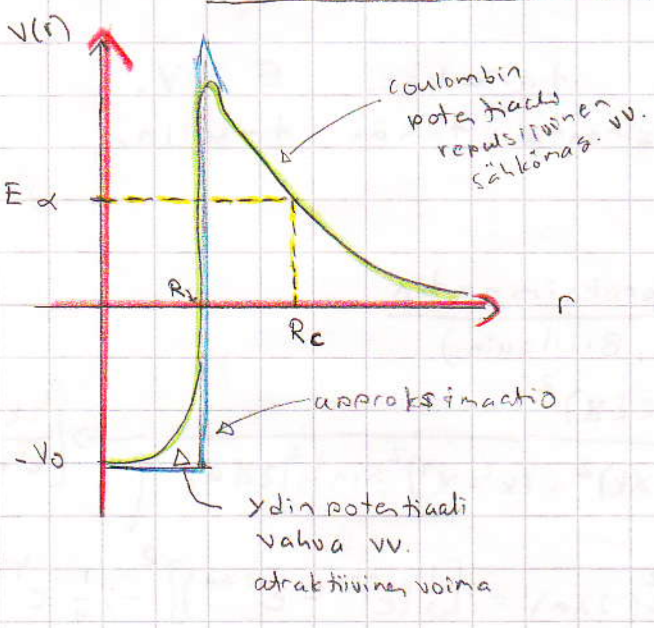
$$\boxed{T \sim e^{-2\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \varkappa_i} \longrightarrow e^{-2\int_a^b dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)}}}$$

WKB approksimaatio

WKB ei toimi jos $E \approx V$

9.4.1 WKB ja α-hajoaminen

= Gamowin teoria α-hajoamisesta ~ 1928



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \le R \\ V_c(r) & r > R \end{cases}$$

$$\boxed{V_c(r) = \frac{Z_\alpha Z}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

Vähän lukuja ^{235}U $E_\alpha = 4.7\ \text{MeV}$ (mitattu)

$$R_c = ? = \frac{Z_\alpha Z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E_\alpha} = \frac{2\cdot 92\cdot(1.6\times10^{-19})^2}{4\pi\, 8.9\times10^{-12}\times 4.7\cdot 1.6\times10^{-13}}\ \text{m} = \underline{56\ \text{fm}}$$

ytimen koko $R = r_0 A^{1/3}$ $\quad r_0 \sim 1.1\ \text{fm}$

$$= 1.3(235)^{1/3} = \underline{8.0\ \text{fm}}$$

$8.0 < 56$ $\quad$ pitää tunneloitua!

nahdotonta selittää klassisen mekaniikan avulla

Tarvitaan kvanttimekaniikkaa

$$T = e^{-2\Lambda} \qquad \Lambda = \int_R^{R_c}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(r) - E)}\,dr$$

V sisälle, E sisälle

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_R^{R_c}\left[\frac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{Z_\alpha Z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_c}\right]dr$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{ZZ_\alpha}{(4\pi\varepsilon_0)}e^2}\int_R^{R_c}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_c}\right)dr$$

TS! Harrastuksen varaan

$$\stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{ZZ_\alpha}{(4\pi\varepsilon_0)}e^2 R_c}\left[\arccos\left(\frac{R}{R_c}\right) - \underbrace{\left(\frac{R}{R_c} - \frac{R^2}{R_c^2}\right)^{1/2}}_{\text{Pois} \sim \text{pieni sillä } R_c > R}\right]$$

$$\arccos(x) = \pi/2 - x + O(x^3) \underset{R_c > R}{\sim} \pi/2$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{ZZ_\alpha}{4\pi\varepsilon_0}e^2\frac{ZZ_\alpha}{4\pi\varepsilon_0}e^2\frac{1}{E_\alpha}}\cdot\pi/2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}e^2\frac{1}{\hbar c}Z\cdot Z_\alpha\sqrt{\frac{mc^2}{2E_\alpha}}\cdot\pi = \alpha Z Z_\alpha\sqrt{\frac{mc^2}{2E_\alpha}}\cdot\pi$$

alaindeksi!

α = hienorakennevakio
ks. Demo 1/2

Eli WKB:llä saatiin

$$\boxed{T \approx e^{-2\pi\alpha Z \cdot z_\alpha \sqrt{\frac{mc^2}{2E}}}} \approx \boxed{e^{-4\frac{Z_1}{\sqrt{E_\alpha}}}} = e^{-G}$$

Gamow factor

SI

yksikkönä MeV E_α:lle

T = tod näk. jotta tapahtuu α - hajoaminen
eli tarvitaan $\frac{1}{T}$ yritystä jotta näin käy $= e^{G}$

Oletetaan että α liikkuu edes - taas r suunnassa
→ yritysten välinen aika $\Delta t = \frac{2R}{V_\alpha}$ ← nopeus

→ ytimen elinaika $\underline{\tau = \frac{2R}{V_\alpha} e^{G}}$

$$\log_{10}(\tau) = \log_{10}\left(\frac{2R}{V_\alpha}\right) + G \log_{10}(e)$$

Arvioidaan: $E_\alpha = \frac{1}{2} m v_\alpha^2 \qquad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}} = c \cdot \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha c^2}}$

$$R = 1.3\ A^{1/3}$$

$$\frac{2R}{V_\alpha} = \frac{2 \cdot 1.3 \cdot A^{1/3}}{c\sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha c^2}}} \overset{TS!}{=} \frac{\sqrt{2m_\alpha c^2}\ 1.3}{c \cdot 10^{15}\ 1/m} \frac{A^{1/3}}{\sqrt{E_\alpha}}$$

MeV

MeV

vuosina

vuosina

$$\rightarrow \underline{\log_{10}(\tau)} = \underbrace{-\log_{10}\left(\frac{1}{2R/V_\alpha}\right)} + 1.73 \frac{Z_1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

$$\approx 29 + \log_{10}\left(\frac{\sqrt{E_\alpha}}{A^{1/3}}\right)$$

$$= \underline{-\left(29 + \log_{10}\left(\frac{\sqrt{E_\alpha}}{A^{1/3}}\right)\right) + 1.73 \frac{Z_1}{\sqrt{E_\alpha}}}$$

vuosina

Kokeellisesti: $\underline{\log_{10}(\tau) = -(28.9 + 1.6\ Z_1^{2/3}) + 1.61 \frac{Z_1}{\sqrt{E_\alpha}}}$