1 Bayes teoria. Luento 1

Uudet luennonajat:
ke 8.15-10.00 MaA210, to 8.15-10.00 MaA210
demot: pe 8.15-10.00 MaD259

1.1 Subjektiiviset todennäköisyydet

La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte.

Todennäköisyysteoria ei ole muuta kun terve järki joka on palautettu matematiikkaan. Se osoittaa eksaktisti sitä jota jo tunnemme vaistomaisesti.
Pierre-Simon Laplace, Théorie Analytique des Probabilités (1814).

My Thesis, paradoxically and a little provocatively, but nontheless genuinely, is simply this: PROBABILITY DOES' NOT EXISTS.
The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston , the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, ..., or Faires and Witches was an essential step along the road on scientific thinking. Probability too, if regarded as something endowed with some kind of objective existance is no less a misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilitic beliefs.
Bruno De Finetti, Theory of Probability (1974).

On merkillistä että kaikille ihmisille, matemaattista sivistystä rippumatta, todennäköisyys on tuttu käsite: me kaikki ymmärrämme mitä jalkapallonvalmentaja tarkoittaa kun kertoo haastattelussa että hänen mielestä joukkueensa voittomahdollisuudet ovat noin 45% (vaikka me voimme olla eri mieltä luvusta).

Kuten meidän kauat esi-isiemme, muut eläimet (myös kasvit, esimerkiksi koivu jossakin vaiheessa joutuu päättäämään että talvi on loppunut ja rupee kasvattamaan lehtiä), joudumme jatkuvasti tekemaan isompia tai pienempia päätöksiä epävarmuuden tilassa. Vaikka ei tiedetä millä mekanismilla se tapahtuu, luonnollinen selektio on muokannut meidän aivoihin vaistomaista älykkyyttä hahmottamaan ja vertailemaan eri mahdollisuuksien "uskottavuuksia", ottaamalla huomioon aikaisempaa kokemusta ja ympäristöltä tulevaa informaatiota. Aloitan ja lopetan saman tien tätä pohdiskelua: kun hypoteettiset avaruusolennot vihdoinkin saapuvat maahaan ulkoavaruudesta ja ilmenee että he osaavat jo koko meidän matematiikkaamme ja jopa mittateoriaa, pystyisivätkö silti ymmärtämään mistä on kyse todennäköisyydessä?

De Finettin rahoitusteoreettinen lähestysmistapa todennäköisyyteen.
Epävarmassa maailmassa, tapahtumat (tai väitteet) voidaan luokitella kahteen luokkaan, $\mathcal{V} = \{$ *varmat tapahtumat* $\}$ ja $\mathcal{E} = \{$ *epävarmat tapahtumat* $\}$. Kun tapahtuma $A \in \mathcal{V}$ on varma ja $A \Longrightarrow B$ (vaihtoehtoinen notaatio $A \subseteq B$) tapahtuu aina silloin kun A tapahtuu myös B tapahtuu , seuraa että myös $B \in \mathcal{V}$ on varma. Tapahtuma A on mahdoton jos sen negaatio $\bar{A}$ (joka tapahtuu silloin kun A ei tapahdu) on varma.

Merkitään luokka $\mathcal{N} = \{$ *mahdottomat tapahtumat* $\}$ ja sanotaan että tapahtumat A, B ovat keskenään *ei sopivia* kun niiden yhteensattuma $AB \in \mathcal{N}$ (vaihtoehtoinen notaatio $A \cap B$) on mahdoton.

$(A + B)$ merkitsee (vaihtoehtoinen notaatio $A \cup B$) tapahtuma jossa A tai B tapahtuvat. Seuraa että $(A + \overline{A})$ on varma tapahtuma.

Eräs vedonlyöntimeklari **(sinä)** ottaa vastaan vetoja tapahtumista $A_1, \dots, A_n$, jotka ovat keskenään ei-sopivia, siis $(A_i \cap A_j) \in \mathcal{N}$ (mahdoton tapahtuma) kun $i \neq j$. Tarkemmin, meklarin on pakko ottaa vastaan mitä tahansa vetoja (myös negatiivisilla panoksilla) tapahtumista A_i, $i = 1, \dots, n$, ja niiden yhdisteistä $(A_i \cup A_j), (A_i \cup A_j \cup A_k), \dots$ jne. Meklari valitsee (sinä valitset) kuitenkin vetojen hinnat (tulkinta: **todennäköisyydet**) $Pr(A_i), Pr(A_i \cup A_j), Pr(A_i \cup A_j \cup A_k) \dots$ jne.

Merkinnät: $p_i := Pr(A_i)$, "satunnaissuure" tai "veto" $\mathbf{1}_{A_i}$ on tapahtuman A_i:n indikaattori joka saa arvon 1 jos tapahtuma A_i tapahtuu, muuten 0.

Huomautus 1.1. *De Finettin kirjassa notaatio $Pr(A)$ merkitsee samaan aikaan probability,price,prevision , eli todennäköisyys, hinta, ennuste.*

Vastapuolen voitto on satunnaissuure

$$V = (\mathbf{1}_{A_1} - p_1)y_1 + \dots + (\mathbf{1}_{A_1} - p_n)y_n$$

jossa $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on vastapuolen vapaasti valittavissa oleva vedonyöntistrategia.

Jos meklarin on johdonmukainen, hän määrää vedonlyönnin hinnat siten, että vastapuolelle ei syntyisi *arbitraasimahdollisuuksia* , eli tilaisuuksia joissa voi tehdä riskitonta voittoa.

Teoreema 1.1. *(Tämä on väite eikä määritelmä !) Jos tapahtumien hinnoittelusysteemi Pr ei salli arbitraasimahdollisuuksia vastapuolelle, seuraa välittömästi että*

1. *Vetojen hinnat ovat yksikäsitteisiä (yhden hinnan laki), vedolle $\mathbf{1}_{A_i}$ on vain yksi hinta $Pr(A_i) \in [0, 1]$.*
2. *Jos $A_i \in \mathcal{V}$ (varma tapahtuma), $Pr(A_i) = 1$ ja vastaavasti jos $A_i \in \mathcal{N}$ (mahdoton tapahtuma), niin $Pr(A_i) = 0$.*
3. *Hinnat (eli todennäköisyydet) ovat (äärellisesti)-additiivisia.*

Todistus : (1),(2): Harjoitustehtävä. (3): Olkoon ensin $n = 2$, $(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{N}$, sen lisäksi oletamme että $(A_1 \cup A_2) \in \mathcal{V}$ (eli on varma tapahtuma). Tästä seuraa että $Pr(A_1 \cup A_2) = 1$.

Lineaarisella systeemilla

$$\begin{cases} V(A_1) = (1 - p_1)y_1 - p_2 y_2 = & \text{vastapuoleen voitto kun } A_1 \text{ tapahtuu} \\ V(A_2) = -p_1 y_1 + (1 - p_2)y_2 = & \text{vastapuoleen voitto kun } A_2 \text{ tapahtuu} \end{cases}$$

on ratkaisu mille tähänsa voitto-vektorille $(V(A_1), V(A_2))$ jos ja vain jos kertoimien matriisi on kääntyvä, eli

$$\det \begin{pmatrix} (1 - p_1) & -p_2 \\ -p_1 & (1 - p_2) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 \neq 0$$

Estääkseen vastapuolta tekemästä riskitöntä voittoa, on välttämätöntä että

$$Pr(A_1) + Pr(A_2) = 1 = Pr(A_1 \cup A_2).$$

Samoin, kun $n > 2$, $A_i \cap A_j \in \mathcal{N}$ kun $i \neq j$ ja, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{V}$ (eli on varma), meklari on johdonmukainen jos ja vain jos

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_n = 0$$

Yleisemmin, kun $(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{N}$, koska $\big(A_1 \cup A_2 \cup \overline{(A_1 \cup A_2)}\big) \in \mathcal{V}$, seuraa

$$1 = Pr(A_1) + Pr(A_2) + Pr(\overline{(A_1 \cup A_2)}) = Pr(A_1) + Pr(A_2) + \big(1 - Pr(A_1 \cup A_2)\big)$$

siis $Pr(A_1 \cup A_2) = Pr(A_1) + Pr(A_2)$ $\square$

Oletetaan että meklari on hinnoitellut johdonmukaisesti keskenään ei-sopivia tapahtumia $A_1, \dots, A_n$ ja niiden yhdisteitä hinnoilla $Pr(A_1), \dots, Pr(A_n)$, jossa P on äärellisesti additiivinen.

Käsitellään vielä monimutkaisempi vedonlyöntisopimus ("satunnaissuure")

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}$$

joka maksaa vastapuolelle etukäteen sovittua summaa $x_i \in \mathbb{R}$ silloin kun "sattuma" A_i tapahtuu, jossa joukot A_i ovat keskenään ei sopivia.

Tämä sopimus arvo on "toistettavissa" vedonlyönnin strategialla $(x_1, \dots, x_n)$.

Koska arbitraasivapaassa hinnoittelusysteemissä hinnat ovat yksikäsitteisiä , seuraa että X:n ainoa johdonmukainen hinta (tulkinta: satunnaissuureen **odotusarvo**) on

$$E_{Pr}(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i Pr(A_i) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(A_x)$$

jossa

$$A_x := \bigcup_{i:x_i=x} A_i = \{X = x\}.$$

Huomautus 1.2. Avaus matemaattiseen finanssiteoriaan *Olkoon*

$$\mathcal{X} \subseteq \left\{ X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i} \ : n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R},\ A_i \textit{ on väite} \right\}$$

vedonlyönninsopimusten osajoukko.

Matemaattisessa finanssiteoriassa, halutaan karakterisoida hintasysteemejä $c = (c(X) : X \in \mathcal{X})$ joilla ei synny arbitraasi-mahdollisuuksia, silloin kun on mahdottomien tapahtumien luokka $\mathcal{N}$ on kiinnitetty.

Seuraa että hinnoittelusysteemi $c(\cdot)$ on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa additiivinen hinnoittelu-todennäköisyys Pr, jolla $Pr(A) = 0 \Longleftrightarrow A \in \mathcal{N}$ ja $c(X) = E_{Pr}(X)$ kaikille $X \in \mathcal{X}$.

Jos hintasysteemi on arbitraasivapaa, hinnoittelu-todennäköisyyden P:n avulla voidaan laajentaa alkuperäistä hintasysteemiä säylyttämällä arbitraasivapautta.

Kun on olemassa, hinnoittelu-todennäköisyys Pr ei tarvitse olla yksikäsitteinen, siis hinta-systeemilla $(c(X) : X \in \mathcal{X})$ voi olla useita arbitraasi-vapaita laajennuksia.

Huomautus 1.3. *A.N.Kolmogorov vuonna 1933 asetti modernin todennäköisyysteorian aksioomat. Kolmogorovin systeemissa tapahtumat A ovat jonkun pistetapahtumien avaruuden Ω:n osajoukkoja, ja todennäköisyysmitta on numeroituvasti additiivinen kuvaus $Pr : \mathcal{F} \to [0,1]$ jossa $\mathcal{F}$ on tapahtumien σ-algebra.*

Sen sijaan De Finetti ja ET Jaynes kannattavat minimaalista lähestymistapaa, jossa tapahtumat ovat väitteitä, ja pistetapahtumien avaruutta Ω ei edes tarvita.

Todennäköisyys logiikan laajennuksena Vuonna 1949 fyysikko R.T. Cox osoitti miten De Finettin additiivisen todennäköisyyden aksioomat seuraavat kun laajennetaan perinteistä logikkaa epävarmoihin väitteisiin pitämällä kiinni minimaalisista tervejärkisistä ehdoista.

Olkoon A, B, C väitteitä, I merkitsee (sinun) taustatietoa. Notaatio

$$(A|I) \geq (B|I)$$

tarkoittaa että taustatiedon I:n perusteella väite A on (sinulle) yhtä uskottava tai uskottavampi kun B väiteettä.

- Vaatimus 1): $\geq$ relaatio on on täydellinen järjestys,

  eli on *transitiivinen*

  $$(A|I) \geq (B|I) \text{ ja } (B|I) \geq (C|I) \text{ seuraa } (A|I) \geq (C|I), \tag{1.1}$$

  ja taustatiedolla I kaikki väitteet ovat verrattavissa, eli

  $$(A|I) \geq (B|I) \text{ tai } (B|I) \geq (A|I) \tag{1.2}$$

  Kun molemmat ovat voimassa $(B|I) = (A|I)$, eli taustatiedolla I, väitteet A ja B ovat sinulle yhtä uskottavia.

Koska väitteiden järjestys on täydellinen, taustatiedon I:n perusteella voidaan asentaa jokaiselle väitteelle A uskottavuusaste joka on reaali luku ja merkitsemme aluksi samalla notaatiolla $(A|I)$. Väitteiden järjestys palautuu reaali lukujen järjestyksen. Tämä uskottavuusaste-funktio ei ole tietenkin yksikäsitteinen. Näytämme että on olemassa funktionaali $\pi(A|I)$ jokä säylyttää $\geq$ järjesystä ja toteuttaa De Finettin additiivisen todennäköisyyden vaatimuksia.

- Vaatimus 2) On olemassa kuvaus $F(x,y)$ joka on kasvava ja derivoituva ja x, y:n suhteen

  $$(AB|I) = F((A|I),(B|A,I)) = F((B|I),(A|B,I))$$

  Siis $(A|I)$ ja $(B|AI)$ määrävät $(AB|I)$ terveen järjen mukaisesti, ja joudutaan samaan arvoon arvioimalla ensin $(B|I)$ ja $(A|B,I)$.

Erityisesti

$$\begin{aligned}(ABC|I) &= F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z)) \qquad (1.3)\\ &= F(u,z) = F(x,v) \qquad (1.4)\end{aligned}$$

jossa $x = (A|I), y = (B|A,I), z = (C|AB,I), u = F(x,y), v = F(y,z)$

Lemma 1.1. *Tästä seuraa että on olemassa kasvava kuvaus $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolla w(F(x,y))= w(x)+w(y)*

Tod. Olkoon $F_1(x,y), F_2(x,y)$ osittaisderivaatat. Derivoimalla 1.3 saadaan

$$\frac{\partial(F(F(x,y),z))}{\partial x} = \frac{\partial(F(x,F(y,z)))}{\partial x}$$
$$\iff F_1(u,z)F_1(x,y) = F_1(x,v),$$
$$\frac{\partial(F(F(x,y),z))}{\partial y} = \frac{\partial(F(x,F(y,z)))}{\partial y}$$
$$\iff F_1(u,z)F_2(x,y) = F_2(x,v)F_1(y,z),$$
$$\frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} = \frac{F_2(x,v)}{F_1(x,v)}F_1(y,z)$$
$$\iff G(x,y) = G(x,v)F_1(y,z)$$
$$\iff G(x,v)F_2(y,z) = G(x,y)G(y,z) \text{ jossa } G(x,y) := \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}$$

Derivoimalla seuraa

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(G(x,v)F_1(y,z)\Big) = G_2(x,v)F_2(y,z)F_1(y,z) + G(x,v)F_{12}(y,z)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(G(x,v)F_2(y,z)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(G(x,y)G(y,z)\Big)\end{aligned}$$

eli $G(x,y)G(y,z)$ ei riipu y:stä. Tämä pätee jos ja vain jos G on muotoa

$$G(x,y) = r\frac{H(x)}{H(y)}$$

Tästä seuraa

$$F_1(y,z) = \frac{H(v)}{H(y)} \quad F_1(y,z) = r\frac{H(v)}{H(z)}$$

Seuraa

$$dv = dF(y,z) = F_1(y,z)dy + F_2(y,z)dz$$
$$\iff \frac{1}{H(v)}dv = \frac{1}{H(y)}dy + r\frac{1}{H(y)}dy$$

Olkoon

$$W(x) := \exp\Big(\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{H(t)} dt\Big)$$

Seuraa kun $v_0 = F(y_0, z_0)$

$$\frac{w(F(y,z))}{w(F(y_0,z_0))} = \frac{w(v)}{w(v_0)} = \exp\Big(\int_{v_0}^{v} \frac{1}{H(t)} dt\Big) = \exp\Big(\int_{F(y_0,z_0)}^{F(y,z)} \frac{1}{H(t)} dt\Big) =$$
$$\exp\Big(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{H(t)} dt + r\int_{z_0}^{z} \frac{1}{H(s)} ds\Big) = \exp\Big(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{H(t)} dt\Big)\exp\Big(r\int_{z_0}^{z} \frac{1}{H(s)} ds\Big) =$$
$$= \frac{W(y)}{W(y_0)}\Big(\frac{W(z)}{W(z_0)}\Big)^r$$
$$\Longleftrightarrow W(v) = W(F(y,z)) = cW(y)W(z)^r \qquad c = \frac{W(F(y_0,z_0))}{W(y_0)W(z_0)^r} \text{ vakio}$$

Yhtälöstä 1.3

$$W(F(x,v)) = cW(x)W(v)^r = W(F(u,z)) = cW(u)W(z)^r$$

Tästä sijoittamalla $W(v) = cW(y)W(z)^r$ saadaan

$$W(x)c^rW(y)^rW(z)^{r^2} = W(u)W(z)^r = W(F(x,y))W(z)^r = W(x)W(y)^rW(z)^r$$
$$\Longleftrightarrow cW(z)^r = W(z) \quad \forall z$$

joka pätee jos ja vain jos $r = c = 1$, eli

$$W(F(x,y)) = W(x)W(y)$$

Ottamalla $w(x) := \log(|W(x)|)$, saadaan

$$w(F(x,y)) = \log(|W(F(x,y))|) = \log(|W(x)W(y)|)$$
$$= \log(|W(x)|) + \log(|W(y)|) = w(x) + w(y) \quad \square$$

Huomataan että $w(A|I)$ säylyttää uskottavuusjärjestystä, eli ollaan mittaamassa väiteeiden uskottavuutta eri asteikolla.

- Vaatimus 3) On olemassa kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolla $w(\overline{A}|I) = f(w(\overline{A}|I))$.

Tästä seuraa $f(f(x)) = x$. Oletetaan nyt että $\overline{B} \Longrightarrow A$, josta seuraa $\overline{B}A = \overline{A}$.

$$\begin{aligned} w(AB|I) &= w(A) + w(B|AI) \\ &= w(A) + f(w(\overline{B}|AI)) \\ &= w(A) + f(w(\overline{B}A|I) - w(A|I)) \\ &= w(A) + f(w(\overline{B}|I) - w(A|I)) \\ &= w(A) + f(f(w(B|I)) - w(A|I)) \\ &= x + f(f(y) - x) \\ &= y + f(f(x) - y) \end{aligned}$$

jossa $x = w(A), y = w(B|I)$

ja viimeinen yhtälö seuraa vaihtaamalla A ja B:n roolit.

Lemma 1.2. *Tästä seuraa*

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\log(1 - \exp(\theta x))$$

Tod. Olkoon

$$\begin{aligned}
&u := f(y) - x, \quad v := f(x) - y,\\
&x + f(u) = y + f(v)\\
&\frac{\partial(x + f(u))}{\partial x} = 1 - f'(u) = \frac{\partial(y + f(v))}{\partial x} = f'(v)f'(x)\\
&\frac{\partial(x + f(u))}{\partial y} = f'(u)f'(y) = \frac{\partial(y + f(v))}{\partial x} = 1 - f'(v)\\
&\frac{\partial^2(x + f(u))}{\partial y \partial x} = -f''(u)f'(y) = -f''(v)f'(x)\\
&\iff \frac{f''(u)}{f'(u)(1 - f'(u))} = \frac{f''(v)}{f'(v)(1 - f'(v))} = c
\end{aligned}$$

Ratkaistaan differentiaali yhtälö

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{d}{dx}\log(|f'(x)|) = c(1 - f'(x))$$

integroimalla

$$\begin{aligned}
&\log(f'(x)) = \log(f'(x_0)) + c\int_{x_0}^{x}(1 - f'(t))dt =\\
&\log(f'(x_0)) + c\Bigg((x - x_0) - (f(x) - f(x_0)) = a + c(x - f(x))\\
&f'(x) = A\exp(c(x - f(x)))\\
&\exp(cf(x))df(x) = A\exp(cx)dx\\
&d\exp(cf(x)) = \frac{A}{c}\exp(cx)dx\\
&\exp(cf(x)) = \exp(cf(x_0)) + \frac{A}{c}\int_{x_0}^{x}\exp(ct)dt =\\
&= \exp(cf(x_0)) + \frac{A}{c^2}\big(\exp(cx) - \exp(cx_0)\big) = k + B\exp(cx)\\
&\implies f(x) = \frac{1}{c}\log(k + b\exp(cx))
\end{aligned}$$

Koska

$$x + f(f(y) - x) = y + f(f(x) - y)$$

saadaan

$$\begin{aligned}
&x + \frac{1}{c}\log\big(k + b\exp(\log(k + b\exp(cy)) - cx)\big) =\\
&x + \frac{1}{c}\log\big(k + b(k + b\exp(cy))\exp(-cx)\big) =\\
&x + \frac{1}{c}\log\big(k + bk\exp(-cx) + b^2\exp(c(y - x)))\\
&= \frac{1}{c}\log\big(k\exp(cx) + bk + b^2\exp(cy)\big) = \frac{1}{c}\log\big(k\exp(cy) + bk + b^2\exp(cx)\big)
\end{aligned}$$

josta seuraa että $b^2 = k$, siis

$$f(x) = \frac{1}{c}\log(b^2 + b\exp(cx))$$

Koska $f(f(x)) = x$,

$$\frac{1}{c}\log(b^2 + b^3 + b^2\exp(cx)) = x \quad \forall x$$

seuraa $b^2 + b^3 = 0$ ja $b^2 = 1$, josta seuraa $b = -1$ ja

$$f(x) = \frac{1}{c}\log(1 - \exp(cx)) \qquad \Box$$

Otetaan uusi uskottavus-skaala $Pr(A|I) = \exp(\gamma w(\overline{A}|I))$. Seuraa lemmasta että

$$\begin{aligned}
&Pr(A|I) = 1 - Pr(\overline{A}),\\
&Pr(\overline{A}|I) \in [0,1]\\
&Pr(AB|I) = Pr(A|I)Pr(B|A,I) = Pr(B|I)Pr(A|B,I)
\end{aligned}$$

Kutsutaan $Pr(A|I)$ väitteen A:n todennäköisyydeksi taustatiedolla I.

Huomataan että uskottavuutta voitaidaan mitata eri skalalla, säylyttämällä järjestystä esimerkiksi vedonlyöntisuhde (englanniksi odds ratio)

$$\phi(A|I) = \frac{Pr(A|I)}{1 - Pr(A|I)} \in \mathbb{R}$$

Huomautus 1.4. *Todennäköisyys on aina ehdollinen todennäköisyys, joka riippuu taustatiedoista. Uskottavuus-järjestys määrää todennäköisyys yksikäsitteisesti. Mittapuuna voidaan käyttää hypoteettista arpajaispelia, arpalipuilla* $\{1, 2, \ldots, N\}$ *ja olkoon* X *ensimmäiseksi arvottu arpa.*

Olkoon väite $A_k = \{X = k\}$*, ja oletamme että* $(A_k|I) = (A_\ell|I)$ $\forall k, \ell$ *eli (sinun mielestä taustatietojen perusteella) kaikki arpajaispelin tulokset ovat yhtä uskottavia. Tämä symmetria kutsutaan yhdentekeväisuuden periaatteeksi . Todennäköisyysasteikolla, tästä symmetriasta additiivisuudesta seuraa välittömasti että* $Pr(A_k|I) = 1/N$*.*

Tämän hypoteettisen pelin todennäköisyydet voidaan sitten käyttää mittapuuna. Olkoon B *väite, jolla ei tarvitse olla tekemisessä meidän hypoteettisen arpapelin kanssa, ja*

$$M := \min\Big\{1 \le k \le N : \ (B|T) \le (A_1 + \cdots + A_k|T)\Big\}$$

Seuraa

$$\frac{(M-1)}{N} < Pr(B|T) \le \frac{M}{N}$$

Silloin kun N kasvaa, nähdään että väitteiden uskottavuuden järjestys määrää yksikäsitteisesti $Pr(B|T)$.

Huomataan kuitenkin että samalla taustatiedolla eri henkilöt saattavat asettaa väitteitä eri uskottavuusjärjestykseen, siksi todennäköisyys ei ole yksikäsitteinen. Objektiivisessa Bayes-teoriassa valitaan todennäköisyysmitta joka on vähiten informatiivinen (jolla on maksimaalinen entropia) ja on yhteensopiva taustatietojen kanssa.

Seuraavat kirjat ovat vapaasti saatavissa linkkeistä http://free-books.dontexist.com, http://gen.lib.rus.ec/

Viitteet

Jaynes ET, *Probability theory, the logic of science*. Cambridge 2003.
Sivia DS, Skilling J: *Data Analysis, a Bayesian tutorial*. 2nd edition Oxford 2006
Robert CP: *The Bayesian Choice, from decision theoretic foundations to computational implementation*. 2nd edition Springer 2007.
Penttinen Antti: Bayes-tilastotiede, luennot 2009http://users.jyu.fi/ penttine/bayes09/luento