JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020
Harjoitus 5
Palautus Kopassa pe 9.10. klo 10.15 mennessä.

1. Luennolla määriteltiin mitallisuus funktiolle $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko. Vastaavasti määritellään funktion $f : A \to [-\infty, \infty]$ mitallisuus vaatimalla, että
$$\{x \in A : f(x) > a\}$$
mitallinen kaikilla $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että mitallisen funktion $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ rajoittuma $f|_A : A \to [-\infty, \infty]$, $f|_A(x) = f(x)$ kun $x \in A$ on mitallinen.
2. Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$, $i = 1, 2, \ldots$ mitallisia funktioita. Luennolla todettiin, että $\inf_{i \geq 1} f_i$ on mitallinen, koska vastaava $\sup f_i$ on ja $\inf_{i\geq 1} f_i = -\sup_{i\geq 1}(-f_i)$. Näytä $\inf_{i\geq 1} f_i$ mitallisuus suoraan mitallisuuden määritelmästä lähtien.
3. Perustele, miksi $\int_{]0,a]} x^{-1}\, dx = \infty$, missä $a > 0$ ja integraali on Lebesguen integraali.
4. Olkoot $f_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $i = 1, 2, \ldots$ mitallisia funktioita. Näytä, että
$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx.$$
5. Keksi vastaesimerkki monotonisen konvergenssin lauseelle ilman positiivisuusoletusta, jossa käytetään kasvavaa jonoa funktioita $f_i : [0, 1] \to [-\infty, \infty]$.
6. Todista käänteinen Fatoun lemma: Olkoot $f_i : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, $i = 1, 2, \ldots$ mitallisia funktioita ja $g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue integroituva s.e. $f_i \leq g$. Osoita, että
$$\limsup_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{i\to\infty} f_i \, dx.$$
7. Mitä voidaan sanoa integroituvan ylärajan g tarpeellisuudesta edellisessä tehtävässä?