JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020
Harjoitus 1
Palautus Kopassa pe 11.9 klo 10.15 mennessä.

1. Olkoon
$$A = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n = 0\}.$$
Osoita Lebesguen ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m^*(A) = 0$.
2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(E) = 0$. Osoita, että
$$\mathbb{R}^n \setminus E$$
on tiheä $\mathbb{R}^n$:n osajoukko.
3. Olkoon
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
vähenevä funktio. Osoita, että f voi olla epäjatkuva vain numeroituvassa joukossa.
Vihje: Muista luennolta lause ylinumeroituvien summien äärettömyydestä.
4. Osoita, että välillä $]0, 1[$ on ylinumeroituvan monta binäärilukua.
Muistutus: Esimerkki yo. välin binääriluvusta $0.101100\ldots = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$.
5. Askel 1: Jaa yksikköneliö $C_0 := [0, 1] \times [0, 1]$ yhdeksään pienempään neliöön ja poista keskimmäinen neliö eli $[1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3]$, jotta saat joukon C_1. Askel 2: Jaa kukin jäljelle jääneistä pikkuneliöistä jälleen 9 neliöön ja poista kustakin keskimmäinen neliö, jotta saat joukon C_2. Hahmottele kuva ja laske jäljelle jääneen kuvion C_k pinta-ala kierroksella k.
6. Näytä, että Lebesguen ulkomitan määritelmässä avoimet välit voidaan korvata suljetuilla
7. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y, x \in [0, 1]\}$. Osoita, että $m^*(A) = 0$.