

**Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020****Harjoitus 2****Palautus Kopassa pe 18.9 klo 10.15 mennessä.**

1. Osoita, että

$$m^*(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

2. Osoita että jos joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ on sisäpiste, niin $m^*(A) > 0$.
3. Onko totta (perustele), että
 - (a) jos $m^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon.
 - (b) jos $m^*(A) < \infty$, niin A on rajoitettu
 - (c) jos $m^*(A) = 0$ niin $m^*(\bar{A}) = 0$.
4. Osoita, että n -välin reunan Lebesguen ulkomitta on nolla.
5. Luennolla konstruointiin Cantor-tyyppinen joukko valitulle $\alpha \in]0, 1[$, siten että $m^*(C) = \alpha$. Asetetaan

$$U = [0, 1] \setminus C.$$

Mikä on U :n reuna ∂U ja sen Lebesguen ulkomitta? Perustele.

Muistutus: Piste x kuuluu reunaan, jos mikä hyvänsä x -keskinen avoin väli sisältää sekä U :n että sen komplementin pisteitä.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$. Todista, että

$$m^*(tA) = t^n m^*(A).$$

7. Onko totta, että jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(A) = m^*(B)$, niin $m^*(B \setminus A) = 0$.