JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020
Harjoitus 3
Palautus Kopassa pe 25.9 klo 10.15 mennessä.

1. Merkataan yksikköpallon $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ ulkomittaa $m^*(B(0,1)) = \omega_n$. Kirjoita tämän avulla r-säteisen pallon $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ ulkomitta.
2. Olkoon $J = [1,2]$. Osoita, että J on (Lebesguen) mitallinen käyttämällä lausetta luennolta joka sanoo, että $A \subset \mathbb{R}$ on mitallinen jos ja vain jos $m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A)$ kaikilla avoimilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.
3. Luennoitsijan käsinkirjoitettujen muistiinpanojen s47 alareunan kuvassa kuutio $I \subset \mathbb{R}^n$ jakautuu neljään pienempään kuutioon. Totea, että pikkukuutioiden geometristen mittojen summa on ison kuution I geometrinen mitta. Ohje: Merkkaa pikkukuutioita $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ jne. ja laske. Piirrä myös kuva.
4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $m^*(\partial A) = 0$, niin joukko A on mitallinen.
5. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(B) = 0$. Näytä, että A on mitallinen jos ja vain jos $A \cup B$ on mitallinen.
6. Todista, että
$$m(A) = \inf\{m(U) : A \subset U, U \text{ avoin}\}$$
jokaiselle Lebesguen mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$.
7. Todista, approksimaatiolauseen kohta (i) $\Rightarrow$ (iii) (luennoitsijan muistiinpanot) eli että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on Leb. mitallinen, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa suljettu $F \subset A$ s.e.
$$m^*(A \setminus F) < \varepsilon.$$
Vihje: Tutki joukkoa A^c.