Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020
Harjoitus 4
Palautus Kopassa pe 1.10. klo 10.15 mennessä.

1. Olkoon $A = \{0\} \times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \chi_A(x)$. Laske Lebesguen integraali $\int_{\mathbb{R}^2} f\,dx$.
2. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yksinkertainen funktio ja joukot $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ pistevieraita ja Lebesgue mitallisia. Osoita, että
$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} f\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dx.$$
3. Totea, että funktio $f : \mathbb{R} \to [0,\infty[$
$$f = 3\chi_{[0,2]} + 2\chi_{[1,3]} + \chi_{\mathbb{Q}}$$
on yksinkertainen tarkastamalla määritelmän ehdot. Määrää sen normaaliesitys ja laske integraali $\int_{\mathbb{R}} f\,dx$.
4. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\chi_{B(0,1)}(x) + 5\chi_{B(x_0,1)}(x)$, missä $B(0,1)$ origikeskinen 1-säteinen avoin pallo, ja $B(x_0,1), x_0 = (3,0,\ldots,0)$, on x_0 keskinen 1-säteinen avoin pallo. Näytä että f on mitallinen
   (i) Määritelmän avulla.
   (ii) Mitallisiin funktioiden luennolla todistettujen ominaisuuksien avulla (esim mitä tiedetään mitallisten funktioiden summasta jne).
5. Näytä, että jokainen kasvava funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.
6. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $p > 0$. Osoita, että
$$|f|^p : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$$
on mitallinen.
7. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ mitallinen ja $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$, jolle pätee, että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ (melkein kaikilla tarkoittaa että 0-mittaista joukkoa lukuunottamatta). Todista, että g on mitallinen.