JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020
Harjoitus 6
Palautus Kopassa pe 16.10. klo 10.15 mennessä.

1. Osoita, että jos f, g ovat integroituvia, niin $\max(f,g)$ ja $\min(f,g)$ ovat.
2. Laske perustellen raja-arvo
$$\lim_{i\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{1}{1+ix}\,dx.$$
3. Laske perustellen raja-arvo
$$\lim_{i\to\infty}\int_{B(0,2)\setminus\overline{B}(0,1)}\log(1+\frac{1}{|x|^i})\,|x|\,dx,$$
missä $B(0,2)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<2\}$ ja $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
4. Olkoon $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ mitallinen ja integroituva funktio. Näytä, että kaikilla $\varepsilon>0$ on olemassa $R>0$, jolle
$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} f\,dx<\varepsilon.$$
5. Formuloi ehdot, ja todista Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen toinen muoto
$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_i-f|\,dx=0.$$
6. (Monisteen Seuraus 6.7) Olkoon A mitallinen, $m(A)<\infty$, ja $f_i\in L^1(A)$, ja $f_i\to f$ tasaisesti A:ssa. Näytä, että $f\in L^1(A)$ ja
$$\int_A f\,dx=\lim_{i\to\infty}\int_A f_i\,dx.$$
7. Olkoon $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että
$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-|x|^2/i}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$