JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Mitta- ja integraaliteoria 1, MATS111, syksy 2020
Harjoitus 7, viimeinen harjoitus MATS111:ssa
Palautus Kopassa pe 23.10. klo 10.15 mennessä.

1. Olkoon $0 < s < 1$. Laske raja-arvo
$$\lim_{i\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{ix^s}{1+ix}\, dx.$$
2. Anna perustellen Riemann integroituva funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joka on epäjatkuva ylinumeroituvan monessa pisteessä.
3. Olkoon $C \subset [0,1]$ alkukurssista konstruoitu (α-)Cantor-tyyppinen joukko, jolle $m(C) > 0$. Perustele, että $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = \chi_C(x)$, ei ole Riemann integroituva. Entä Lebesgue integroituvuus?
4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3$ ja
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$
Laske
$$\int_A f\, dm_2,$$
missä m_2 viittaa $\mathbb{R}^2$ Lebesguen mittaan.
5. Näytä, että jokaisella kasvavalla jatkuvasti derivoituvalle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$ ja mitalliselle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pätee
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f|)\, dx = \int_{[0,\infty[} \varphi'(\lambda) m(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda.$$
Ohje: Voit ottaa todistuksessa syntyvän funktion mitallisuuden annettuna.
6. Onko
$$f(x) = \sqrt{x}$$
absoluuttisesti jatkuva välillä $[0,1]$? Perustele.
7. Täytä palautekysely. Merkkaa selkeästi vastauspaperiisi, että olet täyttänyt palautekyselyn.