

Metriset avaruudet, Harjoitus 1
7.9. 2022

1. Osoita, että d_{SNCF} on metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$. Muista, että $d_{SNCF}(x, y) = \|x - y\|$ jos pisteet x, y ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla ja $d_{SNCF}(x, y) = \|x\| + \|y\|$ muulloin.

2. Osoita, että d on metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$ kun asetaan $d(x, y) = 0$ silloin kun $x = y$ ja $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$ muulloin. Keksitkö tälle mitään geometrista tulkintaa?

3. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$$

antaa normin avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tässä tietenkin $x = (x_1, x_2)$.

4. Osoita, että lauseke

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

antaa normin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

5. Olkoon d_1 tehtävän 3 normin $\|\cdot\|_1$ määräämä metriikka ja d_∞ vastaavasti tehtävän 4 normille d_∞ . Piirrä joukot

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, (1, 1)) < 1\}$$

ja

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, (1, 1)) \leq 1\}.$$

6. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ määritelty kaavalla

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, 2x_2, 3x_3)$$

ja d_E avaruuden $\mathbb{R}^3$ tavallinen Euklidinen metriikka. Asetetaan

$$d(x, y) := d_E(f(x), f(y))$$

kun $x, y \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että d on metriikka.

7. Olkoot parit (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Siis X on joukko ja d_X on metriikka joukossa X ja vastaavasti joukolle Y ja d_Y :lle. Määritellään

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

kun $(x_1, y) \in X \times Y$ ja $(x_2, y_2) \in X \times Y$. Osoita, että d on metriikka joukossa $X \times Y$. Miten tämä liittyy tehtävään 3?

8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määritellään $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ kun $x, y \in X$. Osoita, että d' on metriikka joukossa X .