Metriset avaruudet, Harjoitus 2
14.9. 2022

1. Olkoon d_{SNCF} metriikka $\mathbb{R}^2$:ssa kuten edellisten demojen ensimmäisessä tehtävässä (Ranskan rautatieavaruus). Kuvaile pallot $B(x, 1)$ tämän metriikan suhteen kun $x \neq 0$.

2. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu pallo on suljettu joukko ja että jokainen yhden pisteen muodostama joukko on suljettu joukko.

3. Todista monisteen Propositio 2.9:n kohta (3): äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin.

4. Todista monisteen Propositio 2.16:n kohdat

(1): joukko E on avoin joss $E = \mathrm{int}E$

ja (2): joukko E on suljettu joss $E = \overline{E}$.

5. Todista monisteen Propositio 2.16:n kohdat

(3): $\overline{E} = E \cup \partial E = \mathrm{int}E \cup \partial E$

ja (4): $\partial(X \setminus E) = \partial E$.

6. Todista tämän kurssin suljetun joukon määritelmästä lähtien, että joukko on suljettu täsmälleen silloin kun se sisältää reunansa.

7. Diskreetti metriikka antaa esimerkin metrisestä avaruudesta (X, d), jolle

$$\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r)$$

joillekin x ja $r > 0$. Anna vastaava esimerkki, missä $X = A \subset \mathbb{R}^2$ ja d on $\mathbb{R}^2$:n Euklidisen metriikan joukkoon A indusoima metriikka.

8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $0 < \alpha < 1$. Määritellään

$$d'(x, y) := d(x, y)^\alpha$$

kun $x, y \in X$. Osoita, että d' on metriikka. Vihje: osoita ensin, että $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ aina kun $a, b \geq 0$ esim. seuraavalla idealla

1) oletetaan ensin, että lisäksi $a + b = 1$ ja todistetaan haluttu väite tässä tapauksessa,

2) todistetaan yleinen tilanne kohdan 1) avulla.