Metriset avaruudet, Harjoitus 3
21.9. 2022

1. Onko identtinen kuvaus id, $id(x) = x$, jatkuva kuvauksena $(\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}^2, d_{SNCF})$ kun d_E on tavallinen Euklidinen metriikka $\mathbb{R}^2$:ssa ja d_{SNCF} on kuten edellisten demojen ensimmäisessä tehtävässä (Ranskan rautatieavaruus)? Entäpä käänteiskuvaus?

2. Olkoon $(V, ||.||)$ normiavaruus ja d normin määräämä metriikka. Osoita, että kuvaus $n : (V, d) \to (\mathbb{R}^1, d_E)$, $n(v) := ||v||$, on jatkuva kun d_E on Euklidinen metriikka $\mathbb{R}$:ssä.

3. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ kuvaus. Osoita, että f on jatkuva joss $f^{-1}(F)$ on suljettu jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset Y$.

4. Olkoot $(X, d_X), (Y, d_Y)$ ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia. Oletetaan, että $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ ovat jatkuvia annettujen metriikkojen suhteen. Osoita, että myös $g \circ f : X \to Z$ on jatkuva.

5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja kiinnitetään $x_0 \in X$. Olkoon $a \in X$. Määritellään kuvaus $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$\phi_a(x) := d(x, x_0) - d(x, a).$$

Osoita, että ϕ_a on jatkuva metriikkojen d X :ssä ja d_E $\mathbb{R}$:ssä suhteen. Osoita lisäksi, että ϕ_a on rajoitettu kuvaus.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja kiinnitetään $x_0 \in X$. Määritellään $K(a) = \phi_a$, missä ϕ_a on annettu edellisessä tehtävässä. Edellisen tehtävän nojalla $K : X \to C^0_{raj}(X, \mathbb{R})$. Osoita, että K on isometrinen upotus metriikkojen d ja d_∞ suhteen.

7. Olkoon $f : X \to Y$ homeomorfismi avaruuden X metriikan d_X ja avaruuden Y metriikan d_Y suhteen. Olkoon $E \subset X$. Osoita, että $f(\partial E) = \partial(f(E))$.

8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että löytyy metriikka d' siten, että (X, d') on rajoitettu metrinen avaruus ja identtinen kuvaus $id : (X, d) \to (X, d')$ on homeomorfismi.