Metriset avaruudet, Harjoitus 4
28.9. 2022

1. Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $C \subset X$, $D \subset Y$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $C \times D$ on suljettu metriikkojen d_X, d_Y tuloavaruuteen $X \times Y$ antaman (katso 4.3) metriikan suhteen.

2. Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $E \subset X$, $F \subset Y$. Määritä $\partial(E \times F)$ kun tuloavaruuden metriikka on kuten edellisessä tehtävässä.

3. Osoita, että suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja.

4. Osoita, että Cauchyn jonot ovat rajoitettuja.

5. Anna esimerkki jonosta $(x_k)_k$ pisteitä reaaliakselilla siten, että tämä jono ei ole Cauchyn jono (Euklidisen metriikan suhteen), mutta silti

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - x_{k+1}| = 0.$$

6. Osoita, että tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.

7. Olkoon δ diskreetti metriikka avaruudessa $X = \mathbb{R}^2$. Mitkä jonot ovat Cauchyn jonoja? Perustele.

8. Tarkastellaan normeja

$$||f||_1 := \int_0^1 |f|$$

ja

$$||f||_\infty := \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

avaruudessa $X = C^0([0, 1])$. Osoita, että nämä normit eivät ole ekvivalentteja. Miten tämä on mahdollista?