Metriset avaruudet, Harjoitus 5
5.10. 2022

1. Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Osoita, että tuloavaruus on täydellinen metriikkojen d_X, d_Y tuloavaruuteen $X \times Y$ antaman (katso 4.3) metriikan suhteen joss sekä X että Y ovat täydellisiä.

2. Osoita, että Euklidinen avaruus $(\mathbb{R}^n, d_E)$ on täydellinen kun $n \geq 2$ käyttäen sitä, että $(\mathbb{R}, |.|)$ on täydellinen.

3. Anna esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista (X, d_X) ja (Y, d_Y) siten, että ensimmäinen on täydellinen mutta jälkimmäinen ei ole.

4. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Olkoot

$$X \supset E_1 \supset E_2 \supset ...$$

sisäkkäisiä epätyhjiä suljettuja joukkoja. Oletetaan, että

$$\operatorname{diam}(E_j) \to 0$$

kun $j \to \infty$. Osoita, että

$$\cap_{j=1}^{\infty} E_j = \{x_0\}$$

jollakin $x_0 \in X$.

5. Olkoon (X, d_X) epätyhjä metrinen avaruus ja $E \subset X$. Osoita, että E on tiheä joss $E \cap U \neq \emptyset$ jokaiselle avoimelle epätyhjälle joukolle U.

6. Varustetaan $\mathbb{R}$ diskreetillä metriikalla. Onko $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tiheä? Miksi?

7. Olkoon $E \subset X$ tiheä metriikan d_X suhteen ja $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jatkuva surjektio. Osoita, että $f(E)$ on tiheä. Tarvitaanko tähän todella surjektiivisuutta? Entä jatkuvuutta?

8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva Euklidisten metriikkojen suhteen. Osoita, että funktion f kuvaaja

$$G(f) = \{(x, f(x)) : \ x \in \mathbb{R}\}$$

on suljettu joukko $\mathbb{R}^2$:n Euklidisen metriikan suhteen. Vihje: tarkistele kuvausta $F(x, y) := y - f(x)$.