Metriset avaruudet, Harjoitus 6
12.10. 2022

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita: Jos X on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin E on kompakti.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita: Jos $K \subset X$ on kompakti ja $E \subset X$ on suljettu, niin $E \cap K$ on kompakti.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita: Jos $K_1, \ldots, K_n \subset X$ ovat kompakteja, niin $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$ on kompakti.

4. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) kompakteja metrisiä avaruuksia. Varustetaan $X \times Y$ jollakin metriikoista d_1, d_2, d_∞. Osoita, että $X \times Y$ on kompakti.

5. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ homeomorfismi. Osoita, että X on kompakti joss Y on kompakti.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $K \subset X$ kompakti. Osoita, että löytyy $x, y \in K$, joille pätee $d(x, y) = \mathrm{diam}(K)$.

7. Olkoon $X = \{f \in C^0([0, 1]) : \ ||f||_\infty \leq 1\}$. Varustetaan X normin $||.||_\infty$ antamalla metriikalla d_∞. Aikaisempien tulostemme nojalla X on sekä suljettu että rajoitettu. Osoita ettei X ole jonokompakti.

8. Käy läpi Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon K konstruktio monisteesta ja perustele miksi K on kompakti ja epätyhjä.