Metriset avaruudet, Harjoitus 7
19.10. 2022

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $E \subset X$ yhtenäinen ja $x \in \partial E$. Osoita, että $E \cup \{x\}$ on yhtenäinen.

2. Selitä millä muutoksilla edellisen tehtävän ratkaisusi antaa todistuksen monisteen Propositio 8.8:lle.

3. Osoita, että metrinen avaruus (X, d) on yhtenäinen joss $\emptyset$ ja X ovat ainoat osajoukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja.

4. Osoita, että $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ varustettuna Euklidisella metriikalla on polkuyhtenäinen kun $n \geq 2$.

5. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä ja avoin Euklidisen metriikan suhteen. Kiinnitetään $x_0 \in U$ ja määritellään V niiden U:n pisteiden joukkona, jotka voidaan yhdistää pisteeseen x_0 polulla U:ssa, ja W niiden U:n pisteiden joukkona, joita ei voida. Osoita, että V ja W ovat avoimia.

6. Osoita, että jokainen Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ yhtenäinen avoin joukko on polkuyhtenäinen.

7. Sanotaa, että polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ on murtoviivakuvaus jos löytyy $k \geq 2$ ja $a = a_0 < a_1 < ... < a_k = b$ siten että γ:n rajoittuma jokaiseen väliin $[a_j, a_{j+1}]$ on janakuvaus (siis muotoa $\gamma(t) = x_j + \frac{t-a_j}{a_{j+1}-a_j}(x_{j+1} - x_j)$). Huomaa, että jokainen janakuvaus on murtoviivakuvaus. Todista edellisen tehtävän avulla, että jokainen Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä avoin yhtenäinen joukko on murtoviivayhtenäinen: joukon pisteet voi yhdistää polulla, joka on murtoviivakuvaus (ja jälki on silloin murtoviiva).

8. Olkoon U Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä yhtenäinen avoin joukko. Annetut pisteet $x, y \in U$ voidaan edellisen tehtävän nojalla yhdistää polulla, joka on murtoviivakuvaus ja siten paloittain C^1. Perustele miksi tällaisten polkujen pituuksien infimum $d(x, y)$ antaa metriikan.