Johdatus matemaattiseen analyysiin 4

Kevät 2018

Luentomonisteen runkona ovat olleet Petri Juutisen, Tero Kilpeläisen, Päivi Lammin, Heli Tuomisen ja Tuomo Äkkisen aikaisemmat monisteet.

Sisältö

Viikko 1

Epäoleelliset integraalit

Kerrataan aluksi, mitä tarkoitetaan Riemann-integroituvuudella. Rajoitetulle funktiolle $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ voidaan määritellä alaintegraali

$$\text{ala}\int_a^b f = \sup\{\, L(f,P) : \ P \text{ välin } [a,b] \text{ jako} \,\}$$

ja yläintegraali

$$\text{ylä}\int_a^b f = \inf\{\, U(f,P) : \ P \text{ välin } [a,b] \text{ jako} \,\},$$

missä (Darboux'n) ala- ja yläsummat jaolle $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ ovat

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\ (x_k - x_{k-1})$$

ja

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\ (x_k - x_{k-1}).$$

Funktio f on integroituva yli välin $[a,b]$, jos

$$\text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f.$$

Funktion (Riemann-)integraali yli välin $[a,b]$ on tällöin luku

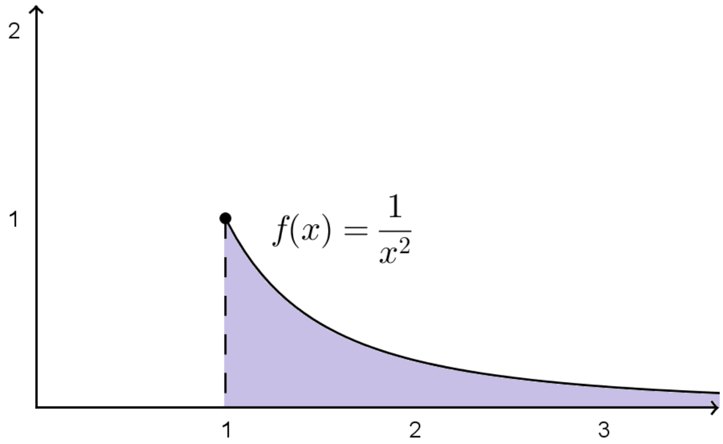
$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f.$$

. . . .

Ongelma 1.0.1. (a) Miksi vastaava määrittely ei onnistu funktiolle $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jos} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{jos} \quad x = 0 \end{cases} \qquad ?$$

(b) Mikä on funktion $f\colon [1,\infty[\; \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[1,\infty[$ rajaaman rajoittamattoman alueen pinta-ala?



. . . .

1.1 Rajoitetun funktion epäoleellinen integraali yli rajoittamattoman välin

Määritelmä 1.1.1. (a) Olkoon $f\colon [a,\infty[\ \to \mathbb{R}$ integroituva jokaisella välillä $[a,c]$, $c > a$. Jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{c\to\infty}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right),$$

niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee ja merkitään

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right).$$

(b) Olkoon $f\colon\ ]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ integroituva jokaisella välillä $[c,b]$, $c < b$. Jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{c\to-\infty}\left(\int_c^b f(x)\,dx\right),$$

niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ suppenee ja merkitään

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(\int_c^b f(x)\,dx\right).$$

(c) Olkoon $f\colon\ ]-\infty,\infty[\ \to \mathbb{R}$ integroituva jokaisella rajoitetulla välillä $[a,b]$. Epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ suppenee jos ja vain jos integraalit $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ ja $\int_0^\infty f(x)\,dx$ molemmat suppenevat. Tällöin

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)dx.$$

Jos epäoleellinen integraali ei suppene, se hajaantuu.

Esimerkki 1.1.2. (a) Olkoon $f\colon [2,\infty[\ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Tällöin f on jatkuva, joten se on integroituva yli jokaisen välin $[2,c]$, $c > 2$. Koska

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$

niin

$$\begin{aligned}
\int_2^c f(x)\,dx &= \int_2^c \frac{1}{x(x-1)}\,dx \\
&= \int_2^c \frac{1}{x-1}\,dx - \int_2^c \frac{1}{x}\,dx \\
&= \Big/_2^c \log(x-1) - \Big/_2^c \log x \\
&= \log(c-1) - \log c + \log 2 \\
&= \log\left(\tfrac{c-1}{c}\right) + \log 2 \\
&= \log\left(1 - \tfrac{1}{c}\right) + \log 2 \xrightarrow{c\to\infty} \log 1 + \log 2 = \log 2.
\end{aligned}$$

Siis $\int_2^\infty f(x)\,dx$ suppenee ja

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \log 2.$$

(b) Olkoon $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^s},$$

$s \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\int_1^c f(x)\,dx = \int_1^c \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \log c, & \text{jos} \quad s = 1 \\ \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s} - 1\right), & \text{jos} \quad s \neq 1. \end{cases}$$

Näin ollen

$$\lim_{c\to\infty} \left(\int_1^c \frac{1}{x^s}\,dx \right) = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & \text{jos} \quad s > 1 \\ \infty, & \text{jos} \quad s \leq 1. \end{cases}$$

Niinpä epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenee jos ja vain jos $s > 1$. Esimerkiksi siis

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

hajaantuu, mutta

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

suppenee.

(c) Integraali

$$\int_0^\infty \sin x\, dx$$

hajaantuu, sillä

$$\int_0^c \sin x\, dx = -\cos c + \cos 0 = -\cos c + 1$$

eikä lausekkeella $-\cos c + 1$ ole raja-arvoa, kun $c \longrightarrow \infty$.

....

Huomautus. (i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ suppenee jos ja vain jos $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ ja $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ suppenevat jollakin $a \in \mathbb{R}$ (katkaisukohdaksi voidaan siis valita mikä tahansa kohta $x = a$).

(ii) Suppeneville epäoleellisille integraaleille pätevät tutut raja-arvoa koskevat laskusäännöt. Esimerkiksi, jos $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ ja $\int_1^{\infty} g(x)\, dx$ suppenevat, niin myös epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} (f(x) + g(x))\ dx$ suppenee ja

$$\int_1^{\infty} (f(x) + g(x))\ dx = \int_1^{\infty} f(x)\, dx + \int_1^{\infty} g(x)\, dx.$$

Tämä voidaan todistaa käyttäen Riemann-integraalin ja raja-arvon laskusääntöjä.

....

Lause 1.1.3. *Olkoon $f\colon [a, \infty[\ \to \mathbb{R}$ integroituva jokaisella välillä $[a, c]$, $a < c$. Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{x\to\infty} f(x) =: m$ ja jos $m \neq 0$, niin integraali $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ hajaantuu.*

Todistus. Oletetaan, että $m > 0$. Tapaus $m < 0$ todistetaan vastaavasti.

Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = m$, kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - m| < \varepsilon$$

kaikilla $x > M$.

Valitaan $\varepsilon = \frac{m}{2} > 0$. Tällöin

$$f(x) > m - \varepsilon = \frac{m}{2}$$

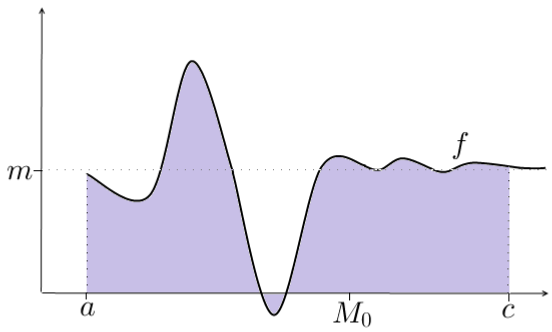
kaikilla $x > M$. Jos $c > M$, niin

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^M f(x)\, dx + \int_M^c f(x)\, dx \geq \int_a^M f(x)\, dx + \frac{m}{2}(c - M) \xrightarrow{c\to\infty} \infty.$$

Näin ollen

$$\lim_{c\to\infty} \left(\int_a^c f(x)\, dx \right) = \infty,$$

joten $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ hajaantuu. $\square$



. . . .

Ongelma 1.1.4. (a) Jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, niin suppeneeko $\int_a^\infty f(x)\,dx$?

(b) Jos $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee, niin pitääkö tällöin paikkansa, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

. . . .

Lemma 1.1.5. *Olkoon $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ ei-negatiivinen funktio (siis $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,\infty[$), joka on integroituva jokaisella välillä $[a,c]$, $a < c$. Tällöin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee jos ja vain jos on olemassa $M > 0$ siten, että*

$$\int_a^c f(x)\,dx \leq M$$

kaikilla $c > a$.

Todistus. Koska $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,\infty[$, niin funktio $F : [a,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

on kasvava. Nyt $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee jos ja vain jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{c\to\infty} \left(\int_a^c f(x)\,dx \right) = \lim_{c\to\infty} F(c).$$

Kasvavalla funktiolla F on olemassa raja-arvo $\lim_{c\to\infty} F(c)$ jos ja vain jos F on ylhäältä rajoitettu (JMA2) eli jos on olemassa $M > 0$ siten, että

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \leq M$$

kaikille $c > a$. □

. . . .

Huomautus. Lemman 1.1.5 väite ei ole totta ilman oletusta "f ei-negatiivinen". Esimerkiksi funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$$\int_0^c \sin x \, dx = -\cos c + 1 \leq 2,$$

mutta $\int_0^\infty \sin x \, dx$ hajaantuu (Esimerkki 1.1.2 (c)).

. . . .

Lause 1.1.6 (Majorantti-/minoranttiperiaate)**.** *Olkoon* $f\colon [a,\infty[\;\to [0,\infty[$ *ei-negatiivinen ja integroituva yli jokaisen välin* $[a,c]$*,* $a < c$*.*

(i) Jos on olemassa $h : [a,\infty[\;\to [0,\infty[$ *siten, että*

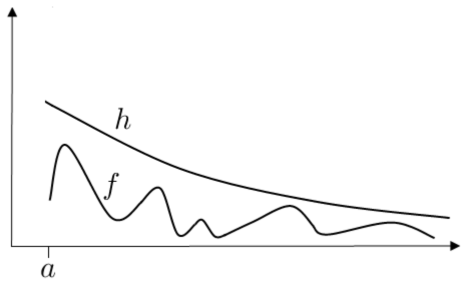
$$0 \leq f(x) \leq h(x)$$

kaikilla $x \in [a,\infty[$ *ja integraali* $\int_a^\infty h(x)\,dx$ *suppenee, niin myös* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *suppenee.*

(ii) Jos on olemassa $g : [a,\infty[\;\to [0,\infty[$ *siten, että*

$$0 \leq g(x) \leq f(x)$$

kaikilla $x \in [a,\infty[$ *ja integraali* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *hajaantuu, niin myös* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *hajaantuu.*



TODISTUS. *(i)* Koska $\int_a^\infty h(x)\,dx$ suppenee, on olemassa $M > 0$ siten, että

$$\int_a^c h(x)\,dx \leq M$$

kaikille $c > a$ (Lemma 1.1.5). Näin ollen

$$\int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c h(x)dx \leq M$$

kaikille $c > a$. Lemman 1.1.5 nojalla $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee.

(ii) Tehdään vastaoletus: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee. Tällöin kohdasta (i) seuraa, että $\int_a^\infty g(x)\,dx$ suppenee. Tämä on ristiriita, joten $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu. $\square$

. . . .

Esimerkki 1.1.7. Suppeneeko
$$\int_1^\infty \frac{4\sin^2 x}{1+x^3}\,dx\ ?$$
Huomataan ensin, että $1+x^3=0$ jos ja vain jos $x=-1$. Näin ollen $f\colon [1,\infty[\ \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{4\sin^2 x}{1+x^3}$$
on jatkuva, joten f on integroituva yli jokaisen välin $[1,c]$. Lisäksi $f(x)\geq 0$ kaikilla $x\in[1,\infty[$. Nyt
$$0\leq \frac{4\sin^2 x}{1+x^3}\leq \frac{4}{1+x^3}\leq \frac{4}{x^3}$$
ja integraali
$$\int_1^\infty \frac{4}{x^3}\,dx$$
suppenee (Esimerkki 1.1.2 (b)). Majoranttiperiaatteen (Lause 1.1.6) nojalla integraali
$$\int_1^\infty \frac{4\sin^2 x}{1+x^3}\,dx$$
suppenee ja
$$0\leq \int_1^\infty \frac{4\sin^2 x}{1+x^3}\,dx\leq 4\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx=2.$$
....

Lause 1.1.8 (Osamäärätesti)**.** *Olkoot $f\colon [a,\infty[\ \to\mathbb{R}$ ja $g : [a,\infty[\ \to\mathbb{R}$ ei-negatiivisia funktioita, jotka ovat integroituva yli jokaisen välin $[a,c]$, $a<c$, ja oletetaan, että*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A\in[0,\infty].$$

(i) Jos $0<A<\infty$, niin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee jos ja vain jos $\int_a^\infty g(x)\,dx$ suppenee.

(ii) Jos $A=0$ ja jos $\int_a^\infty g(x)\,dx$ suppenee, niin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee.

(iii) Jos $A=\infty$ ja jos $\int_a^\infty g(x)\,dx$ hajaantuu, niin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu.

Todistus. *(i)* Koska $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, jokaiselle $\varepsilon>0$ on olemassa $M>0$ siten, että
$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$$
kaikilla $x\geq M$. Valitaan $\varepsilon=\frac{A}{2}$, joka on positiivinen, sillä $0<A<\infty$. Näin ollen
$$\frac{A}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3A}{2} \qquad (*)$$
kaikilla $x\geq M$.

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee. Lemman 1.1.5 nojalla on olemassa $L > 0$ siten, että

$$\int\limits_a^c f(x)dx \leq L$$

kaikilla $c > a$. Epäyhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$g(x) \leq \frac{2}{A} f(x)$$

kaikilla $x \geq M$. Nyt

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^c g(x)\,dx &= \int\limits_a^M g(x)\,dx + \int\limits_M^c g(x)\,dx \\
&\leq \int\limits_a^M g(x)\,dx + \frac{2}{A}\int\limits_M^c f(x)\,dx \\
&\leq \int\limits_a^M g(x)\,dx + \frac{2}{A}\int\limits_a^c f(x)\,dx \\
&\leq \int\limits_a^M g(x)\,dx + \frac{2}{A}L,
\end{aligned}$$

joten integraaleilla $\int\limits_a^c g(x)\,dx$ on luvusta c riippumaton yläraja. Lemman 1.1.5 nojalla $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ suppenee.

"$\Leftarrow$"

Ongelma 1.1.9. Todista, että jos $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ suppenee, niin $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ suppenee.

(ii) ja *(iii)* jätetään harjoitustehtäviksi. □

....

Esimerkki 1.1.10. Suppeneeko

$$\int\limits_1^\infty \frac{2x^3+5x}{3x^5+1}\,dx\ ?$$

Huomataan ensin, että funktio on ei-negatiivinen, kun $x \geq 3$ (harjoitustehtävä). Valitaan $g(x) = \frac{1}{x^2}$ Tällöin

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2x^3+5x}{3x^5+1}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(2x^3+5x)x^2}{3x^5+1} = \frac{2x^5+5x^3}{3x^5+1} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{2}{3}.$$

Koska $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ suppenee, niin osamäärätestin, Lause 1.1.8, nojalla $\int\limits_1^\infty \frac{2x^3+5x}{3x^5+1}\,dx$ suppenee.

....

Ongelma 1.1.11. Suppeneeko

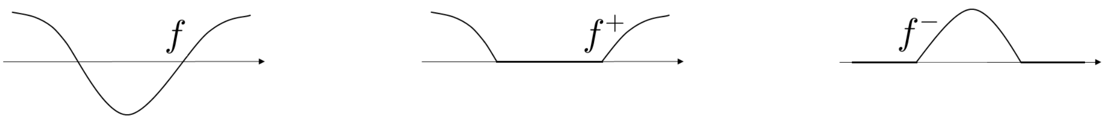
$$\int_1^\infty \sin \tfrac{1}{x}\, dx\ ?$$

Määritelmä 1.1.12. Epäoleellinen integraali $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ *suppenee itseisesti*, jos integraali $\int\limits_a^\infty |f(x)|\, dx$ suppenee.

Merkintöjä.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad \text{(funktion } f \text{ positiiviosa)}$$
$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \qquad \text{(funktion } f \text{ negatiiviosa)}$$

Tällöin $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ ja $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.



Lause 1.1.13. *Olkoon $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ integroituva yli jokaisen välin $[a, c]$, $a < c$. Jos $\int\limits_a^\infty |f(x)|\, dx$ suppenee, niin tällöin myös $\int\limits_a^\infty f(x) dx$ suppenee.*

TODISTUS. Koska $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ ja $\int\limits_a^\infty |f(x)|\, dx$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen (Lause 1.1.6) nojalla $\int\limits_a^\infty f^+(x)\, dx$ suppenee. Samoin $\int\limits_a^\infty f^-(x)\, dx$ suppenee, sillä $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$ kaikilla $x \in [a, \infty[$. Näin ollen on olemassa äärelliset raja-arvot

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f^+(x)\, dx =: I_1$$

ja

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f^-(x)\, dx =: I_2.$$

Nyt

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^c \Big(f^+(x) - f^-(x)\Big)\, dx = \int_a^c f^+(x)\, dx - \int_a^c f^-(x)\, dx \xrightarrow{c\to\infty} I_1 - I_2.$$

Epäoleellinen integraali $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ siis suppenee. $\square$

Esimerkki 1.1.14. (a) Integraali

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

suppenee, sillä se suppenee itseisesti:

$$0 \le \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \le \frac{1}{x^2}$$

kaikilla $x \ge 2\pi$. Koska $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ suppenee (Esimerkki 1.1.2 (b)), niin majoranttiperiaatteen (Lause 1.1.6) nojalla $\int_{2\pi}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ suppenee. Lauseen 1.1.13 nojalla $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ suppenee.

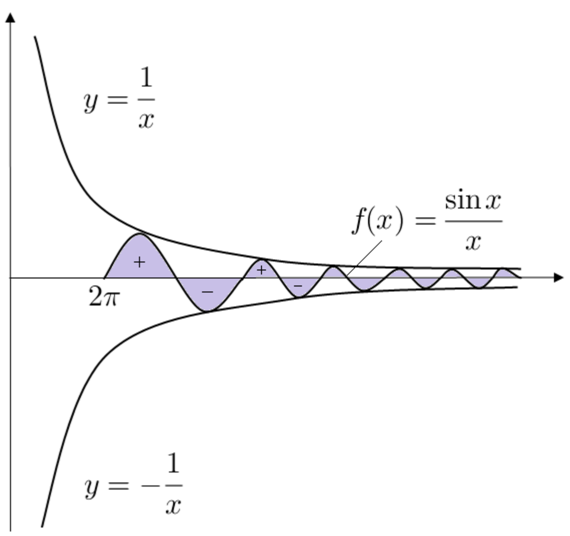
(b) Integraali

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

suppenee, mutta ei suppene itseisesti.

TODISTUS.

- Osoitetaan, että integraali $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ suppenee.



Jos $c > 2\pi$, niin osittaisintegroinnilla ($u(x) = -\frac{1}{x}$, $v'(x) = -\sin x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x^2}$, $v(x) = \cos x$) saadaan, että

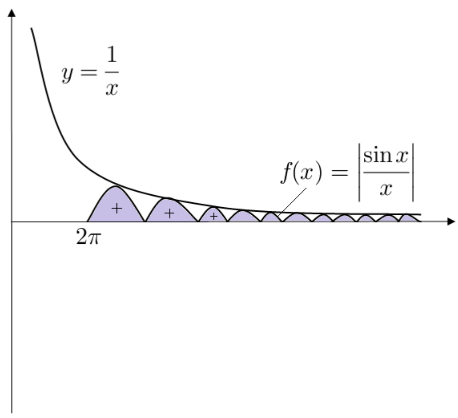
$$\begin{aligned}
\int_{2\pi}^{c} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \Big/_{\!\!2\pi}^{c} -\frac{\cos x}{x}\, dx - \int_{2\pi}^{c} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \\
&= -\frac{\cos c}{c} + \frac{1}{2\pi} - \int_{2\pi}^{c} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \\
&\xrightarrow{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} - \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx,
\end{aligned}$$

missä $\int\limits_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ suppenee (a)-kohdan perusteella.
Näin ollen

$$\lim_{c\to\infty} \left(\int\limits_{2\pi}^{c} \frac{\sin x}{x}\, dx \right) = \frac{1}{2\pi} - \int\limits_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \in \mathbb{R},$$

joten $\int\limits_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ suppenee.

- Osoitetaan, että integraali $\int\limits_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ei suppene itseisesti.



$$\begin{aligned}
\int\limits_{2\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \ldots + \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\
&\geq \frac{1}{3\pi} \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \underbrace{|\sin x|}_{\sin x} dx + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \underbrace{|\sin x|}_{-\sin x} dx + \ldots + \frac{1}{n\pi} \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|\, dx \\
&= \frac{1}{3\pi} \cdot 2 + \frac{1}{4\pi} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{n\pi} \cdot 2 \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \\
&\geq \frac{2}{\pi} \left(\int\limits_{3}^{4} \frac{1}{x}\, dx + \int\limits_{4}^{5} \frac{1}{x}\, dx + \ldots + \int\limits_{n}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int\limits_{3}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\log(n+1) - \log 3 \right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.
\end{aligned}$$

Epäoleellinen integraali

$$\int\limits_{2\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

siis hajaantuu.

$\square$

1.2 Rajoittamattoman funktion epäoleellinen integraali

Määritelmä 1.2.1. (a) Oletetaan, että $f\colon [a,b[\ \to \mathbb{R}$ on integroituva yli jokaisen välin $[a,c]$, $a < c < b$. Jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{c\to b-}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right),$$

niin epäoleellinen integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ suppenee ja merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b-} f(x)\,dx = \lim_{c\to b-}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right).$$

(b) Vastaavasti määritellään funktiolle $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$, joka on integroituva yli jokaisen välin $[c,b]$, $a < c < b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+}\left(\int_c^b f(x)\,dx\right),$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Jos epäoleellinen integraali ei suppene, sanotaan, että integraali hajaantuu.

Lauseita 1.1.6 (Majorantti-/minoranttiperiaate) ja 1.1.8 (Osamäärätesti) vastaavat tulokset ovat voimassa myös integraaleille $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ ja $\int_{a+}^b f(x)\,dx$ oleellisesti samoin todistuksin.

. . . .

Esimerkki 1.2.2. (a) Integraali $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee jos ja vain jos $s < 1$. Nimittäin

$$\int_c^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\left(1-c^{1-s}\right), & \text{jos} \quad s \neq 1 \\ -\log c, & \text{jos} \quad s = 1. \end{cases} \xrightarrow{c\to 0+} \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & \text{jos} \quad s < 1 \\ \infty, & \text{jos} \quad s \geq 1. \end{cases}$$

Huomaa, että

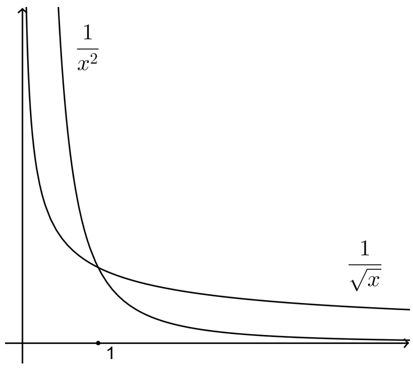
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \text{ hajaantuu, mutta } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ suppenee.}$$

Toisaalta

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ suppenee, mutta } \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ hajaantuu.}$$

Lisäksi

$$\text{sekä } \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \text{ että } \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ hajaantuvat.}$$



(b) Integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\log\frac{1}{x}}\,dx$$

suppenee majoranttiperiaatteen nojalla, sillä

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}\log\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

kun $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ja $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ suppenee esimerkin (a)-kohdan perusteella.

1.3 Yleinen epäoleellinen integraali

Jos integroimisväli on $]-\infty,\infty[$ ja/tai on useampia pisteitä, joiden lähellä funktio f ei ole rajoitettu, integroimisväli on jaettava osiin. Tällöin alkuperäinen integraali suppenee jos ja vain jos kunkin osavälin yli otettu epäoleellinen integraali suppenee.

. . . .

Esimerkki 1.3.1. (a) Suppeneeko integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2\log x}\,dx\ ?$$

Koska

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x^2\log x} = \infty,$$

niin integroitava funktio ei ole rajoitettu pisteen $x = 1$ läheisyydessä. Tutkitaan erikseen integraaleja

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2\log x}\,dx$$

ja

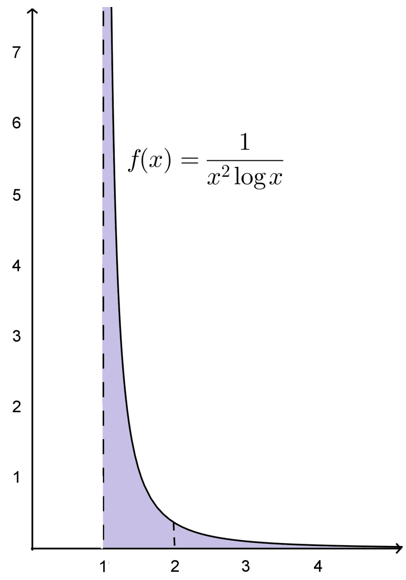
$$I_2 = \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2\log x}\,dx.$$

Nyt
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 \log x}\, dx$$
suppenee jos ja vain jos sekä I_1 että I_2 suppenevat.

- I_2 : Kun $x \geq 2$, niin
$$0 \leq \frac{1}{x^2 \log x} dx \leq \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{x^2}.$$
Koska
$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$
suppenee (Esimerkki 1.1.2 (b)), niin
$$\int_2^\infty \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$$
suppenee. Majoranttiperiaatteen nojalla
$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2 \log x}\, dx$$
suppenee.

- I_1 : Sijoittamalla $x = e^t$, jolloin $dx = e^t dt$ ja $t = \log x$, saadaan
$$\begin{aligned} I_1 = \int_c^2 \frac{1}{x^2 \log x}\, dx &= \int_{\log c}^{\log 2} \frac{1}{(e^t)^2\, t}\, e^t\, dt \\ &= \int_{\log c}^{\log 2} \frac{1}{e^t\, t}\, dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\log c}^{\log 2} \frac{1}{t}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \Big/_{\log c}^{\log 2} \log t \\ &= \frac{1}{2} \left(\log(\log 2) - \log(\underbrace{\log c}_{>0}) \right) \xrightarrow{c \to 1+} \infty. \end{aligned}$$

Koska I_1 hajaantuu, niin
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 \log x}\, dx$$
hajaantuu.



Huomautus. Edellä olevassa ratkaisussa valittiin integraalin katkaisukohdaksi $x = 2$, mutta katkaisukohta olisi voinut olla jokin muukin. Oleellista on jakaa epäoleellisuustekijät eri palasiin.

(b) Suppeneeko

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^3-1}\,dx\ ?$$

Integroitavaa funktiota ei ole määritelty pisteessä $x = 1$. Lisäksi funktio on tämän pisteen läheisyydessä rajoittamaton. Esimerkin integraali suppenee jos ja vain jos integraalit

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3-1}\,dx$$

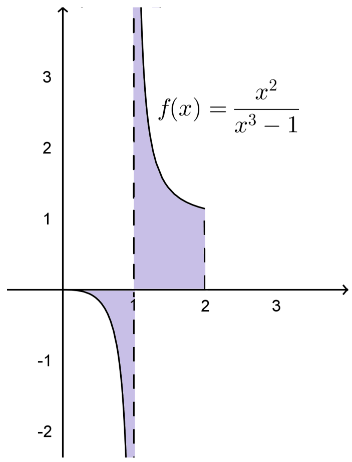
ja

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^3-1}\,dx$$

suppenevat. Olkoon $0 < c < 1$. Nyt

$$\begin{aligned}\int_0^c \frac{x^2}{x^3-1}\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^c \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx \\ &= \frac{1}{3} \Big/_0^c \log\left|x^3-1\right| \\ &= \frac{1}{3}\log(1-c^3) \xrightarrow{c\to 1-} -\infty.\end{aligned}$$

Siis $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3-1}dx$ hajaantuu, joten $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3-1}dx$ hajaantuu.



Ongelma 1.3.2. Suppeneeko

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,dx, \qquad s \in \mathbb{R}\ ?$$

Harjoitustehtäviä

1. Tutki suppenevatko epäoleelliset integraalit

   (a) $\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx.$

   (b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx.$

2. Tutki suppenevatko epäoleelliset integraalit

   (a) $\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx.$

   (b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+3}\,dx.$

3. Laske epäoleelliset integraalit

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}}\,dx.$

   (b) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

4. Laske epäoleelliset integraalit

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx.$

5. Tutki suppenevatko epäoleelliset integraalit

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx.$

6. Tutki suppenevatko integraalit

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$

7. Tutki suppeneeko integraali $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx.$

8. Tutki suppenevatko integraalit $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\, dx$ ja $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\, dx.$

9. Tutki suppenevatko epäoleelliset integraalit

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-x}}\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^7 e^{-x}\, dx.$

10. Osoita, että

    (a) $\displaystyle\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx = \pi.$

    (b) integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$ hajaantuu.

11. Laske epäoleelliset integraalit

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx.$

    (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx.$

12. Tutki suppeneeko integraali $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x \sin x}{x^3 - x + 1}\,dx$.

13. Tutki suppenevatko integraalit

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{x}\,dx$ ja $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-3x}}{x}\,dx$.

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x}\,dx$.
    (Vihje: l'Hôpitalin sääntö)

14. Tutki suppenevatko integraalit

    (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$.

    (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$.

15. Tutki suppenevatko integraalit $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ ja $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

16. Tutki suppeneeko integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$.
    (Ohje: Tehtävä onnistuu sekä laskemalla että arvioimalla.)

17. Tutki millä parametrien $s \in \mathbb{R}$ arvoilla integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^s}\,dx$ suppenee.

18. Tutki millä parametrin $s \in \mathbb{R}$ arvoilla integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+x^2}{x^s}\,ds$ suppenee.

19. Tutki suppeneeko integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(5x+1)^7}{x^9}\,dx$.

20. Tutki millä parametrien $s, r \in \mathbb{R}$ arvoilla integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^s}{(1+x^2)^r}\,dx$ suppenee.
    (Vihje: Osamäärätesti)

21. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva yli jokaisen välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

    (a) Oletetaan, että integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ suppenee ja olkoon

    $$L = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx.$$

    Onko tällöin totta, että

    $$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c f(x)\,dx = L\ ?$$

(b) Jos integraalit $\int_{100}^{\infty} f(x)\,dx$ ja $\int_{-\infty}^{-100} f(x)\,dx$ suppenevat, niin suppeneeko integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$?

22. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva yli jokaisen välin $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Osoita, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ suppenee jos ja vain jos integraalit $\int_{-1}^{\infty} f(x)\,dx$ ja $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ suppenevat.

23. Olkoot $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ ja $g\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ ei-negatiivisia ja jatkuvia funktioita siten, että
$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
(a) Osoita, että jos integraali $\int_0^1 g(x)\,dx$ suppenee, niin myös $\int_0^1 f(x)\,dx$ suppenee.
(b) Näytä vastaesimerkin avulla, että integraalin $\int_0^1 f(x)\,dx$ suppenemisesta ei yleisesti ottaen seuraa integraalin $\int_0^1 g(x)\,dx$ suppeneminen.

24. Olkoot $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ja $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ei-negatiivisia ja jatkuvia funktioita siten, että integraali $\int_0^{\infty} g(x)\,dx$ hajaantuu ja
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$
Osoita, että myös integraali $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ hajaantuu.

25. Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[c,b]$ kaikilla $c \in]a,b[$. Oletetaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f(t)\,dt$ suppenee. Määritellään funktio $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ seuraavasti
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$
Osoita, että F on derivoituva välillä $]a,b[$. Mikä on sen derivaatta?

26. Olkoon $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle on olemassa raja-arvo $f_\infty := \lim_{x\to\infty} f(x)$.
Osoita, että
$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = (f(0) - f_\infty)\log(\tfrac{b}{a}).$$

27. Kun käyrä $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyskappale, joka tunnetaan nimellä Gabrielin torvi.

    (a) Laske Gabrielin torven rajoittaman kappaleen tilavuus

    $$V = \pi \int_1^\infty f(x)^2 \, dx.$$

    (b) Osoita, että Gabrielin torven pinnan pinta-ala

    $$A = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

    on ääretön.

28. Gammafunktio on $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}$,

    $$\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx.$$

    (a) Osoita, että gammafunktion määrittelevä integraali suppenee kaikilla $t > 0$.

    (b) Näytä: jos $t \in \mathbb{N}$, niin

    $$\Gamma(t) = (t-1)!$$

    (Vihje: Todista ensin osittaisintegroimalla, että $\Gamma(t) = (t-1)\,\Gamma(t-1)$)

Viikko 2

Lukusarjojen suppenemisesta

Johdatus matemaattiseen analyysiin 1 -kurssilla (JMA1) on käyty läpi reaalilukujonojen ominaisuuksia. Ainakin seuraavia asioita olisi hyvä palautella mieliin:

- Jono reaalilukuja (x_n) **suppenee** kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että
$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N_\varepsilon.$$
Luku a on jonon (x_n) **raja-arvo** ja merkitään
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
Jos jono (x_n) ei suppene kohti mitään lukua $a \in \mathbb{R}$, niin jono (x_n) **hajaantuu**.
- Rajoitettu ja monotoninen jono suppenee.
- Jono (y_k) on jonon (x_n) **osajono**, mikäli on olemassa luonnolliset luvut $n_1, n_2, n_3, \ldots$ siten, että
$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots \quad \text{ja} \quad y_k = x_{n_k}.$$
- Suppenevan jonon jokainen osajono suppenee ja osajonon raja-arvo on sama kuin alkuperäisen jonon raja-arvo.
- Rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.
- Jono (x_n) on **Cauchy-jono**, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että
$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n, m \geq N_\varepsilon.$$
- Lukujono suppenee jos ja vain jos se on Cauchy-jono.

Palautetaan mieliin myös muutama hyödyllinen summakaava:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \qquad \text{kun } r \neq 1.$$

2.1 Lukusarjan määritelmä

Määritelmä 2.1.1 (Lukusarja ja sen osasummat)**.** Olkoon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ lukujono. Mahdollista summaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_1 + a_2 + \cdots$$

sanotaan jonon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ määräämäksi **(luku)sarjaksi**. Sarjan j:s **termi** on luku a_j ja (äärellinen) summa

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

on sarjan n:s **osasumma**.

Äärettömän monen reaaliluvun laskeminen yhteen ei perinteisessä mielessä ole mahdollista. Sarjan summa määritelläänkin sen osasummien avulla: lasketaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ yhteen jonon n ensimmäistä termiä, muodostetaan näistä osasummista lukujono $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja tutkitaan, miten käy, kun $n \to \infty$.

Määritelmä 2.1.2 (Sarjan suppeneminen)**.** Olkoon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reaalilukujono. Jos sarjan $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ osasummien muodostamalla jonolla $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on raja-arvo $S \in \mathbb{R}$, niin sanotaan, että sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ **suppenee** ja raja-arvo

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

on sen **summa**; merkitään

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j\,.$$

Ellei sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppene, niin sanotaan, että se **hajaantuu**.

Huomautus 2.1.3. (i) Sarja siis hajaantuu, jos sen osasummien jonolla ei ole raja-arvoa (tai jos mahdollinen raja-arvo on $\pm\infty$).

(ii) Sarjan ja sen summan merkitseminen samalla symbolilla saattaa tuntua hieman sekavalta, mutta on hyvin yleinen käytäntö.

(iii) Usein sarjassa summausindeksi ei lähde ykkösestä vaan nollasta tai jostain muusta (luonnollisesta) luvusta. Ilmeinen pieni muokkaus määritelmään kertoo, mitä silloin tarkoitetaan sarjan summalla.

(iv) Se, mistä indeksistä summaaminen aloitetaan, ei vaikuta sarjan suppenemiseen (hajaantumiseen), sillä äärellisen monen luvun muuttaminen ei vaikuta suppenemiseen (hajaantumiseen). Suppenevalla sarjalla tämä toki vaikuttaa itse summaan.

(v) Sarjoja ei voi käsitellä aivan yhtä “huolettomasti” kuin äärellisiä summia, sillä summattavia termejä on ääretön määrä. Esimerkiksi summattavien termien järjestystä ei sarjassa voi noin vain vaihtaa, sillä summausjärjestystä vaihtamalla voidaan nimittäin jopa saada suppenevasta sarjasta hajaantuva; tästä esimerkkejä myöhemmin (ks 3.2.6 ja 3.2.7).

. . . .

Esimerkki 2.1.4. (a) Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

missä $a_j = (-1)^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Tällöin parillisille osasummille

$$\sum_{j=1}^{2n} a_j = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 = 0,$$

kun taas parittomille

$$\sum_{j=1}^{2n-1} a_j = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 = 1$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten osasummien jono $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ ei suppene ja siten sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

(b) Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}.$$

Huomataan, että kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}.$$

Näin ollen sarjan n. osasumma palautuu **teleskooppisummaksi**

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ja näin ollen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Siispä annettu sarja suppenee ja sen summa on 1.

. . . .

Esimerkki 2.1.5 (Geometrinen sarja)**.** Tarkastellaan geometrista sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} r^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} r^j,$$

missä $r \in \mathbb{R}$. Jos $r = 1$, niin sarjan n:s osasumma $S_n = n + 1$ ja $S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$. Sarja siis hajaantuu, kun $r = 1$.

Olkoon sitten $r \neq 1$. Tällöin n:nnelle osasummalle pätee

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

Tämän osoittaminen on harjoitustehtävänä **1.** Lisäksi (kun $r \neq 1$) lukujono (r^{n+1}) suppenee täsmälleen silloin, kun $|r| < 1$, ja näille r on

$$\lim_{n \to \infty} r^{n+1} = 0.$$

Siispä geometrinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $|r| < 1$, ja sarjan summalle pätee

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1 - r}.$$

. . . .

Ongelma 2.1.6. Olkoot $|r| < 1$, $m \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{R}$. Laske summa

$$\sum_{j=m}^{\infty} ar^j.$$

Ongelma 2.1.7. Esitä seuraavat desimaalimuodossa annetut rationaaliluvut geometristen sarjojen avulla:

(a) $0.111\ldots$

(b) $0.323232\ldots$.

Esitä luvut myös rationaalilukuina.

. . . .

Esimerkki 2.1.8 (Harmoninen sarja)**.** Sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

sanotaan **harmoniseksi sarjaksi**. Se hajaantuu, mikä nähdään seuraavasti: Tarkastellaan sarjan osasummien jonon $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajonoa $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Induktiolla voidaan osoittaa, että $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska osajono $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ on rajoittamaton, myös osasummien jono $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hajaantuu ja harmoninen sarja ei suppene.

. . . .

Huomautus. Sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}$$

sanotaan **vuorottelevaksi harmoniseksi sarjaksi**. Esimerkissä 3.2.2 osoitetaan, että tämä sarja suppenee.

. . . .

Huomautus 2.1.9. Sarjat ja epäoleelliset integraalit ovat läheisessä yhteydessä. Olkoon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reaalilukujono ja määritellään

$$
f(x) = \begin{cases} a_1, & 1 \le x < 2 \\ a_2, & 2 \le x < 3 \\ & \vdots \\ a_n, & n \le x < n+1 \\ & \vdots \end{cases}.
$$

Tällöin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee jos ja vain jos epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ suppenee (harjoitustehtävä **19**).

. . . .

Äärellinen summaaminen on lineaarista. Tämä on totta myös suppeneville sarjoille:

Lause 2.1.10. *Olkoot* $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ *kaikille* $j \in \mathbb{N}$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Jos sarjat*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \textit{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j \,,$$

suppenevat, niin myös sarjat

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j + b_j) \quad \textit{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} (ca_j)$$

suppenevat ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \qquad \textit{sekä} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (ca_j) = c \sum_{j=1}^{\infty} a_j \,.$$

Todistus on jätetty harjoitustehtäväksi **4.**

. . . .

Ongelma 2.1.11. Osoita Lauseen 2.1.10 avulla, että sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 + 2 \cdot 3^{j+2}}{5^{j+1}}$$

suppenee ja laske sarjan summa.

2.2 Ehtoja sarjan suppenemiselle

Luvun alussa palauteltiin mieliin Cauchy-jono ja Cauchyn kriteerio suppenemiselle. Sarjojen tapauksessa Cauchyn kriteerio voidaan muotoilla seuraavasti:

Lause 2.2.1 (Cauchyn kriteerio sarjojen suppenemiselle)**.** *Olkoot* $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. *Sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee, jos ja vain jos sen osasummien jono* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *on Cauchy-jono, eli kaikilla* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{m} a_j \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| < \varepsilon,$$

kunhan $n > m \geq N_\varepsilon$.

. . . .

Ongelma 2.2.2. Todista Lause 2.2.1 (käyttäen lukujonojen Cauchyn kriteeriota).

. . . .

JMA1 -kurssilla on osoitettu, että monotoninen lukujono suppenee jos ja vain jos se on rajoitettu. Tästä saadaan sarjojen tapauksessa seuraava lause:

Lause 2.2.3. *Jos $b_j \geq 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee, jos ja vain jos sen osasummien jono muodostaa rajoitetun jonon, toisin sanoen on olemassa $M \in \mathbb{R}$, jolle*

$$(0 \leq) \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \leq M \qquad \textit{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

. . . .

Ongelma 2.2.4. Todista Lause 2.2.3.

. . . .

Jotta sarja voisi supeta, on summattavien termien lähestyttävä nollaa, kun n kasvaa rajatta.

Lause 2.2.5. *Jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin*

$$\lim_{j\to\infty} a_j = 0\,.$$

Todistus. Termit saadaan helposti osasummista, sillä

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j.$$

Lisäksi huomataan, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0,$$

sillä sarja suppenee eli osasummien jono $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee. □

. . . .

Huomautus 2.2.6. Lause 2.2.5 ei toimi toiseen suuntaan: vaikka sarjan termille a_j pätisikin, että $a_j \to 0$, kun $j \to \infty$, niin siitä **ei** seuraa, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenisi. Tästä esimerkkinä on harmoninen sarja (Esimerkki 2.1.8): termi $\frac{1}{j} \to 0$, kun $j \to \infty$, mutta sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ hajaantuu (tosin hyvin hitaasti).

. . . .

Esimerkki 2.2.7 (p-harmoninen sarja)**.** Selvitetään, millä luvun $p \in \mathbb{R}$ arvoilla (p-harmoninen) sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$$

suppenee. Tätä sarjaa kutsutaan **yliharmoniseksi**, kun $p > 1$ ja **aliharmoniseksi**, kun $0 < p < 1$.

RATKAISU. Olkoon $p > 1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

Sarjan n:nnelle osasummalle saadaan arvio

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} \leq \sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{1}{j^p} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^p} \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{2^{(k-1)p}} \\ &= 1 + 2\frac{1}{2^p} + 4\frac{1}{4^p} + 8\frac{1}{8^p} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^{(k-1)p}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n\end{aligned}$$

Koska oikealle saatiin suppeneva geometrinen sarja (suhdeluku on $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$), niin Lauseen 2.2.3 nojalla p-harmoninen sarja suppenee, kun $p > 1$.

Ongelma 2.2.8. Osoita, että p-harmoninen sarja hajaantuu, kun $p \leq 1$.

. . . .

Määritelmä 2.2.9. Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Sanotaan, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ **suppenee itseisesti** (tai **absoluuttisesti)**, jos termien itseisarvojen muodostama sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$$

suppenee. Sanotaan myös, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee **ehdollisesti**, jos se suppenee, mutta se ei suppene itseisesti.

. . . .

Suppeneva sarja **ei** välttämättä suppene itseisesti. Esimerkiksi vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j}$$

suppenee (katso Esimerkki 3.2.2), mutta se ei suppene itseisesti, sillä itseisarvoista muodostettu sarja on harmoninen sarja. Niinpä vuorotteleva harmoninen sarja suppenee ehdollisesti.

Käänteinen kuitenkin pätee eli itseisesti suppeneva sarja suppenee:

. . . .

Lause 2.2.10. *Itseisesti suppeneva sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee ja*

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| .$$

Todistus. Olkoon $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ itseisesti suppeneva sarja ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin Cauchyn kriteerion nojalla löytyy siis $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|\sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j=1}^{m} |a_j|\right| < \varepsilon \qquad \text{eli} \qquad \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| < \varepsilon,$$

kun $n > m \geq N_\varepsilon$. Edelleen, kun $n > m \geq N_\varepsilon$, niin osasummien

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

jonolle pätee kolmioepäyhtälön nojalla

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| < \varepsilon.$$

Siispä $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on myös Cauchy-jono, siis suppeneva, ja näin ollen itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Väitteen epäyhtälö seuraa myös kolmioepäyhtälöstä: koska **kaikilla** $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| ,$$

niin

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| .$$

□

. . . .

Ongelma 2.2.11. Millä $p \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j^p}$$

suppenee itseisesti?

. . . .

2.3 Suppenemistestejä: vertailutestejä

Sarjan osasummien laskeminen ja niiden raja-arvon (tai Cauchyn ehdon toteutumisen) tutkiminen on yleensä hyvin hankalaa. Lisäksi suppenemisen osoittaminen suoraan määritelmää käyttäen on mahdotonta ellei tiedetä mikä on sarjan summa. Niinpä, kun tutkitaan suppeneeko annettu sarja vai ei, käytetäänkin tavallisesti seuraavaksi esiteltäviä testejä, joiden avulla vastauksen voi päätellä parhaimmillaan hyvinkin helposti.

Erään keinon päätellä sarjan hajaantuminen antoi jo Lause 2.2.5: jos sarjan termit a_j eivät lähesty nollaa kun j kasvaa rajatta, sarja $\sum a_j$ hajaantuu. Esimerkiksi sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{j}}$$

hajaantuu, sillä muistamalla, että

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{j} = 1,$$

saadaan

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{j}} = 1.$$

....

Seuraus 2.3.1 (0-testi)**.** *Olkoot* $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. *Jos sarjan termit* a_j *eivät lähesty nollaa, kun* $j \to \infty$, *niin sarja* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

....

Aiemmin opittiin jo, että ehto $\lim a_j = 0$ ei vielä takaa sarjan suppenemista. Tällaisissa tapauksissa tarvitaan siis muita keinoja sarjan suppenemisen (hajaantumisen) toteamiseen. Seuraavat **Majorantti- ja Minoranttiperiaatteet** ovat diskreetit versiot epäoleellisten integraalien vastaavista periaatteista.

....

Lause 2.3.2 (Majorantti- ja Minoranttiperiaate)**.** *Olkoon* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *reaalilukujono, missä* $a_j \geq 0$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$.

(a) Jos on olemassa luvut $b_j \geq 0$, *joille*

$$a_j \leq b_j \quad \textit{kaikilla } j \in \mathbb{N}$$

ja sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *suppenee, niin myös sarja* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee.*

(b) Jos on olemassa luvut $c_j \geq 0$, *joille*

$$a_j \geq c_j \geq 0 \quad \textit{kaikilla } j \in \mathbb{N}$$

ja sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ *hajaantuu, niin myös sarja* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

....

Ongelma 2.3.3. Todista Lauseen 2.3.2 kohta (a) käyttäen Lausetta 2.2.3. Kohta (b) on harjoitustehtävä **27.**

. . . .

Huomautus 2.3.4. Jos jonolle $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on olemassa luvut $b_j \geq 0$, joille

$$|a_j| \leq b_j \quad \text{kaikilla } j \in \mathbb{N}$$

ja sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee, niin tällöin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti (ja siksi suppenee).

. . . .

Esimerkki 2.3.5. (a) Olkoon

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(4j)}{4 + j^{5/2}}.$$

Osoitetaan, että tämä sarja suppenee (itseisesti).

Ratkaisu. Nyt kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\left| \frac{\cos(4j)}{4 + j^{5/2}} \right| \leq \frac{1}{j^{5/2}}$$

ja tiedetään Esimerkistä 2.2.7, että yliharmoniset sarjat suppenevat eli sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{5/2}}$$

suppenee. Niinpä Majoranttiperiaatteen nojalla sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(4j)}{4 + j^{5/2}}$$

suppenee itseisesti, joten sarja suppenee.

(b) Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{j^2 - 1}$$

hajaantuu.

Ratkaisu. Kaikille $j \in \mathbb{N},\ j \geq 2$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{j}{j^2 - 1} \geq \frac{j}{j^2} = \frac{1}{j} > 0.$$

Harmoninen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ hajaantuu, joten myös sarja $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j}$ hajaantuu. Niinpä Minoranttiperiaatteen nojalla myös sarja

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{j^2 - 1}$$

hajaantuu.

. . . .

Ongelma 2.3.6. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

(a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{j}{j+1}$.

(b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{2^n}$.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2+4k-7}{k^4+3k^2-7k+1}$.

. . . .

Majorantti- ja Minoranttiperiaatteissa tutkittavaa positiivitermistä lukusarjaa arvioidaan ylhäältä päin suppenevalla sarjalla tai alhaalta päin hajaantuvalla sarjalla. Monesti termien arvioiminen suoraan saattaa olla haasteellista, kuten Ongelman 2.3.6 (c)-kohdasta voi havaita. Kuitenkin tässä kyseisessä tehtävässä luvun k kasvaessa havaitaan, että osoittajaa hallitsee vahvasti termi k^2 ja nimittäjää k^4, joten suurilla luvun k arvoilla summan termit ovat suuruusluokkaa $\frac{k^2}{k^4} = \frac{1}{k^2}$ eli sarja muistuttaa suppenevaa yliharmonista sarjaa.

Todistetaan seuraavaksi ns. **Osamäärätesti**, jonka mukaan riittää verrata sarjan termiä tunnettuun suppenevaan/hajaantuvaan sarjan termiin ja tutkia tämän osamäärän raja-arvoa suppenemisen/hajaantumisen päättelemiseksi.

. . . .

Lause 2.3.7 (Osamäärätesti)**.** *Olkoot* $a_j \geq 0$ *ja* $b_j > 0$*,* $j \in \mathbb{N}$*.*

(a) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = A \in \,]0,\infty[,$$

niin sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee, jos ja vain jos sarja* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *suppenee.*

(b) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = 0$$

ja jos sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *suppenee, myös sarja* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee.*

(c) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = \infty$$

ja jos sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *hajaantuu, myös sarja* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

TODISTUS.

(a) Koska $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{a_j}{b_j} = A \in \,]0,\infty[$, niin raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|\frac{a_j}{b_j} - A\right| < \frac{A}{2} \quad \text{kaikilla } j \geq N.$$

Toisin sanoen kaikilla $j \geq N$ pätee

$$\frac{1}{2}A < \frac{a_j}{b_j} < \frac{3}{2}A \quad \text{eli} \quad \tfrac{A}{2}b_j < a_j < \tfrac{3A}{2}b_j.$$

Nyt jos lukusarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee, niin myös sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{3A}{2}b_j$ suppenee (Lause 2.1.10), ja tällöin Majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum\limits_{j=N}^{\infty} a_j$ (ja siksi myös sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$) suppenee.

Vastaavasti jos sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin myös sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{2}{A}a_j$ suppenee (Lause 2.1.10), ja tällöin Majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum\limits_{j=N}^{\infty} b_j$ (ja siksi myös sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$) suppenee.

(b) Ongelma 2.3.8

(c) Harjoitustehtävä **28.**

$\square$

. . . .

Ongelma 2.3.8. (a) Olkoot $a_j \geq 0$ ja $b_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = 0$$

ja jos sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee, niin myös sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee.

(b) Keksi esimerkki suppenevasta sarjasta $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ ja hajaantuvasta sarjasta $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ siten, että $a_j \geq 0$ ja $b_j > 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ sekä

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = 0.$$

. . . .

Esimerkki 2.3.9. (a) Positiiviterminen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j}{12j^2 + 6j - 7}$$

hajaantuu Osamäärätestin nojalla, sillä

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{4j}{12j^2+6j-7}}{\frac{1}{j}} = \lim_{j\to\infty} \frac{4j^2}{4j^2(3 + \frac{3}{2j} - \frac{7}{4j^2})} = \frac{1}{3} > 0$$

ja harmoninen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

hajaantuu.

(b) Sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j + \sin(j^6)}$$

suppenee Osamäärätestin perusteella, sillä

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{1}{2^j+\sin(j^6)}}{\frac{1}{2^j}} = \lim_{j\to\infty} \frac{2^j}{2^j(1+\frac{\sin(j^6)}{2^j})} = 1 > 0$$

ja geometrinen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$

suppenee.

. . . .

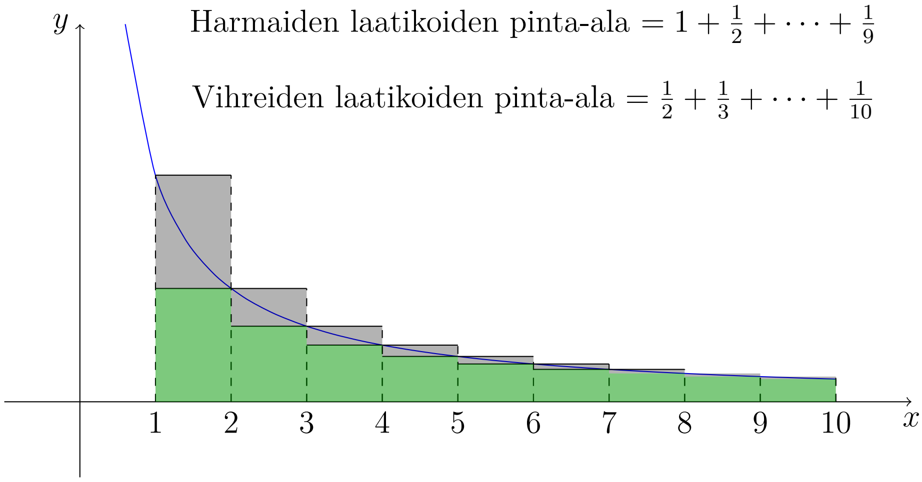
Ongelma 2.3.10. Osoita Osamäärätestin avulla, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 4k - 7}{k^4 + 3k^2 - 7k + 1}$$

suppenee (vrt. Ongelma 2.3.6.)

. . . .

Seuraava lause kytkee epäoleellisen integraalin suppenemisen integrandin avulla kirjoitetun sarjan suppenemiseen. Tässä perusesimerkkinä kannattaa ajatella harmonisen sarjan tapausta.



Kuva 2.1: Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ epäoleellisen integraalin yhteys harmoniseen sarjaan.

. . . .

Lause 2.3.11. (Integraalitesti) *Olkoon $f\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$ jatkuva ja vähenevä funktio. Olkoon*

$$a_n = f(n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos ja vain jos epäoleellinen integraali

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$$

suppenee.

Todistus. Funktio f on jatkuva, joten se on integroituva jokaisella välillä $[1,c]$, $c > 1$.

Oletetaan ensin, että integraali $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ suppenee. Arvioidaan sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osasummia. Koska kaikilla $n \geq 2$ on termin a_n määrittelyn ja funktion f vähenevyyden nojalla

$$0 < a_n = \int_{n-1}^{n} a_n\,dx = \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx,$$

niin kaikilla $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n &= a_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n \leq a_1 + \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \\ &= a_1 + \int_1^{N} f(x)\,dx \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Koska integraali $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ suppenee, niin sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osasummat ovat rajoitettuja. Sarja suppenee Lauseen 2.2.3 nojalla.

Oletetaan sitten, että sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Koska funktio $F\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$,

$$F(c) = \int_1^{c} f(x)\,dx$$

on kasvava (f on ei-negatiivinen), niin äärellinen raja-arvo $\lim\limits_{c\to\infty} \int_1^{c} f(x)\,dx$ on olemassa, jos ja vain jos F on ylhäältä rajoitettu.

Olkoot $c > 1$ ja $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N \geq c$. Tällöin funktion f vähenevyyttä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}F(c) \leq F(N) &= \int_1^{N} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(n)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

Koska sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin funktio F on ylhäältä rajoitettu. Siten epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ suppenee. $\square$

. . . .

Esimerkki 2.3.12. Näytetään integraalitestin avulla, että sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$$

suppenee.
Ratkaisu. Olkoon $f \colon [2, \infty[\to [0, \infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2(x)}.$$

Tällöin f on vähenevä funktio (Miksi?) ja

$$\begin{aligned}\int_2^c f(x)\,dx &= \int_2^c \frac{1}{x} \log^{-2}(x)\,dx = \int_2^c \frac{d}{dx}\Big(-(\log x)^{-1}\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{\log(2)} - \frac{1}{\log(c)} \to \frac{1}{\log(2)}, \quad \text{kun } c \to \infty.\end{aligned}$$

Niinpä epäoleellinen integraali $\int_2^c f(x)\,dx$ suppenee ja siten sarja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$ suppenee.

Integraalitestin todistus antaa myös tavan arvioida sarjan summaa: Ylhäältä päin

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n \log^2(n)}\,dx \le \frac{1}{2\log^2(2)} + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x \log^2(x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2\log^2(2)} + \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2(x)}\,dx = \frac{1}{2\log^2(2)} + \frac{1}{\log(2)},\end{aligned}$$

ja alhaalta päin

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{n \log^2(n)}\,dx \ge \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x \log^2(x)}\,dx \\ &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2(x)}\,dx = \frac{1}{\log(2)}.\end{aligned}$$

Näin ollen sarjan summalle pätee

$$\frac{1}{\log(2)} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} \le \frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{2\log^2(2)}.$$

....

Ongelma 2.3.13. Osoita integraalitestin avulla, että yliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ suppenee. Näytä myös, että

$$\frac{9}{8} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \le \frac{10}{8}.$$

Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. Osoita, että yhtäsuuruus

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

pätee kaikille $n \in \mathbb{N}$.

2. Olkoon $c > 0$. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$$

3. Esitä seuraavat desimaalimuodossa annetut rationaaliluvut geometristen sarjojen avulla:

(a) $0.75454\ldots$

(b) $0.999\ldots$.

Esitä luvut myös rationaalilukuina.

4. Todista Lause 2.1.10 (Käytä lukujonojen raja-arvojen tunnettuja ominaisuuksia).

5. Sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ on **aritmeettinen**, jos kahden peräkkäisen termin erotus on vakio, ts. jos on $d \in \mathbb{R}$ siten, että $a_{j+1} - a_j = d$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Laske perustellen aritmeettisen sarjan osasumma S_n ja näytä, että aritmeettinen sarja suppenee, jos ja vain jos $a_1 = 0 = d$.

6. Sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ on **geometrinen**, jos kahden peräkkäisen termin suhde on vakio, ts. jos on $r \in \mathbb{R}$ siten, että $a_{j+1} = a_j r$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Laske perustellen geometrisen sarjan osasumma S_n ja tutki geometrisen sarjan suppenemista.

7. Oletetaan, että sarjat $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenevat ja sarjat $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} d_j$ hajaantuvat. Mitä voit sanoa sarjojen

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_j + 4b_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty}(2a_j + c_j) \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty}(c_j + d_j)$$

suppenemisesta? Perustele!

8. Osoita, että suppenevalle sarjalle $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ pätee

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_j = 0.$$

9. Osoita, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\log(n+1) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \log n\,,$$

ja osoita tämän avulla, että harmoninen sarja hajaantuu.
(Muista logaritmin määritelmä, $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{z}\,dz,\ x > 0$.)

10. Laske summat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+2)(j+4)} \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(9+j)(10+j)}.$$

11. Suppeneeko sarja? Laske summa.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{j+1}{j}$

(b) $\sum_{j=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$

12. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

suppenee ja arvioi sen summaa.

13. Suppenevatko seuraavat sarjat?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{j^3+1}}$

14. Suppenevatko seuraavat sarjat?

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^j}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

15. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n^2+10)}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+3n^2)}{n^{\frac{4}{3}}}$

16. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2+6n+11}{(n+1)(n-4)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\log(n)}$

17. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$

18. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$$

suppenee

19. Olkoon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reaalilukujono ja määritellään

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & 1 \le x < 2 \\ a_2, & 2 \le x < 3 \\ & \vdots \\ a_n, & n \le x < n+1 \\ & \vdots \end{cases} .$$

Näytä määritelmien perusteella, että sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee jos ja vain jos epäoleellinen integraali $\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx$ suppenee.

20. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tutki integraalitestin avulla, millä luvun α arvoilla sarja

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

suppenee.

21. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tutki integraalitestin avulla, millä luvun α arvoilla sarja

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)(\log(\log(n)))^\alpha}$$

suppenee.

22. Osoita integraalitestin avulla, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

suppenee. Arvioi summaa ylhäältä ja alhaalta käyttäen sopivan funktion epäoleellista integraalia apuna. Arvioi sarjan summaa niin, että virhe on korkeintaan 10^{-4}.

23. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tutki, millä luvun α arvoilla sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\alpha}(n)}{n}$$

suppenee.

24. Oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on suppeneva positiiviterminen sarja. Osoita, että lukujen a_n joukossa on suurin.

25. Tutkitaan lukusarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}$$

suppenemista. Havaitaan, että

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1 \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

ja koska yliharmonisena sarjana $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee, niin Majoranttiperiaatteen nojalla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}$$

suppenee. Vai suppeneeko?

26. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on suppeneva positiiviterminen sarja, niin suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \ ?$$

27. Osoita Lauseen 2.3.2 kohta (b): Jos on olemassa luvut $c_j \geq 0$, joille

$$a_j \geq c_j \geq 0 \quad \text{kaikilla } j \in \mathbb{N}$$

ja sarja $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

28. (a) Olkoot $a_j \geq 0$ ja $b_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos

$$\lim_{j \to \infty} \frac{a_j}{b_j} = \infty$$

ja jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

(b) Keksi esimerkki suppenevasta sarjasta $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ ja hajaantuvasta sarjasta $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ siten, että $a_j \geq 0$ ja $b_j > 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ sekä

$$\lim_{j \to \infty} \frac{a_j}{b_j} = \infty.$$

29. Osoita, että vuorottelevan harmonisen sarjan parilliset osasummat $(S_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ muodostavat ylhäältä rajoitetun kasvavan jonon ja parittomat osasummat $(S_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ muodostavat alhaalta rajoitetun vähenevän jonon. Osoita, edelleen näiden avulla, että vuorotteleva harmoninen sarja suppenee.

30. Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ sellaisia, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti. Määritellään $a_j^+ = \max\{a_j, 0\}$ ja $a_j^- = -\min\{a_j, 0\}$. Osoita, että sarjat

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+ \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$$

suppenevat. Näytä myös, että näistä seuraa sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppeneminen.

31. Oletetaan, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee ehdollisesti. Mitä voi tällöin sanoa sarjojen

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+ \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$$

suppenemisesta? (Nämä määritelty Tehtävässä **30.**)

32. Olkoot $a_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$. Oletetaan lisäksi, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee. Osoita, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ suppenee. Päteekö käänteinen?

33. Olkoon $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ itseisesti suppeneva sarja ja olkoon $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ rajoitettu lukujono. Osoita, että sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$$

suppenee itseisesti.

34. Jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu ja jono $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu, niin hajaantuuko sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j?$$

35. Oletetaan, että $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$ ja että sarjat $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenevat.

Suppeneeko $\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, b_j$?

36. Näytä, että on olemassa jono (k_j), missä $k_j \in \{0, 1, 2\}$, siten, että

$$\frac{1}{4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{3^j}.$$

Mitä desimaaliluku $0, k_1 k_2 k_3 \ldots$ tarkoittaa tässä tapauksessa? Määrää luvut k_j.

(Jaa väli $[0, 1]$ kolmeen osaan ja tutki, mille näistä $\frac{1}{4}$ kuuluu, jaa saatu väli kolmeen osaan jne.)

37. Osoita, että

$$\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} > \frac{1}{3n} \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{N}$$

ja päättele tämän avulla, että sarja

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

hajaantuu.

Viikko 3

Lukusarjat: suppeneminen (osa 2), summausjärjestys ja sarjojen tulo

3.1 Suppenemistestejä: muita yleisiä testejä

Edellisessä luvussa tutkittiin lukusarjojen perusominaisuuksia, tarkasteltiin esimerkkejä suppenevista ja hajaantuvista sarjoista sekä todistettiin joitakin suppenemistestejä (0-testi, Majorantti- ja Minoranttiperiaatteet, osamäärätesti ja integraalitesti). Näiden avulla ei kuitenkaan aina voida tehdä päätelmiä sarjan suppenemisesta, ja siksi tässä luvussa esitelläänkin lisää suppenemistestejä.

Sarjan peräkkäisten termien suhteen avulla voidaan tutkia, millä vauhdilla jonon (a_n) jäsenet lähestyvät nollaa. Jos $a_n \to 0$ riittävän nopeasti, sarja $\sum a_n$ suppenee.

. . . .

Lause 3.1.1. (Suhdetesti) *Olkoot* $a_j \in \mathbb{R}$, $a_j \neq 0$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$.

(a) Jos on olemassa $\rho < 1$ *ja* $N \in \mathbb{N}$, *joille*

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \leq \rho \qquad \textit{kaikilla } j \geq N\,,$$

niin sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee (itseisesti).*

(b) Jos on olemassa $N \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \geq 1 \qquad \textit{kaikilla } j \geq N\,,$$

niin sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

Todistus.

(a) Oletuksesta seuraa, että

$$|a_j| \leq \rho|a_{j-1}| \leq \rho^2|a_{j-2}| \leq \cdots \leq \rho^{j-N}|a_N| \qquad \text{kaikille } j \geq N.$$

Niinpä sarjaa

$$\sum_{j=N}^{\infty} |a_j|$$

majoroi suppeneva geometrinen sarja

$$\sum_{j=N}^{\infty} |a_N|\rho^{j-N} = \sum_{j=0}^{\infty} |a_N|\rho^j ,$$

joten Majoranttiperiaatteen (Lause 2.3.2) nojalla sarja $\sum_{j=N}^{\infty} |a_j|$ suppenee (ja siksi myös sarja $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ suppenee). Näin ollen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee (itseisesti).

(b) Oletuksen nojalla kaikille $j \geq N$ pätee

$$|a_j| \geq |a_{j-1}| \geq |a_{j-2}| \geq \cdots \geq |a_N| > 0,$$

joten sarjan termi a_j ei lähesty nollaa, kun j kasvaa rajatta. Niinpä 0-testin nojalla sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

□

....

Ongelma 3.1.2. Tiedetään, että harmoninen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ hajaantuu. Miksi tämä ei ole ristiriidassa Lauseen 3.1.1 kohdan (a) kanssa?

....

Ongelman 3.1.2 johdattelemana päästään Suhdetestin raja-arvoversioon.

Lause 3.1.3 (Suhdetestin raja-arvoversio)**.** *Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$, $a_j \neq 0$ kaikille $j \in \mathbb{N}$.*

(a) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} < 1 ,$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee (itseisesti).

(b) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} > 1 ,$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

....

Ongelma 3.1.4. Todista Lause 3.1.3.

....

Esimerkki 3.1.5. (a) Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

suppenee suhdetestin nojalla, koska kaikille kokonaisluvuille $n \geq 1$

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1\,.$$

(b) Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

suppenee suhdetestin raja-arvoversion nojalla, koska

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} \to 0 < 1\,,$$

kun $n \to \infty$.

....

Ongelma 3.1.6. Tutki sarjan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j!)}{(j!)^2}$$

suppenemista Suhdetestin avulla.

Ongelma 3.1.7. Anna esimerkit jonoista $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ja $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $a_j \neq 0 \neq b_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joille

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = 1 = \lim_{j\to\infty} \frac{|b_{j+1}|}{|b_j|},$$

sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee ja sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ hajaantuu.

....

Jos peräkkäisten termien (itseisarvojen) osamäärän raja-arvoa ei ole olemassa, on turvauduttava tavalliseen suhdetestiin tai muihin testeihin:

Esimerkki 3.1.8. Määritellään jono $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ siten, että

$$a_j = \begin{cases} \frac{1}{3^k}, & \text{kun } j = 2k, \\ \frac{2}{3^{k+1}}, & \text{kun } j = 2k+1. \end{cases}$$

Tällöin kaikille k on

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{1} = \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^{k+1}}{2} = \frac{1}{2}$$

ja siten raja-arvoa

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|}$$

ei ole olemassa. Suhdetestin raja-arvoversio ei siis anna mitään tietoa suppenemisesta, mutta Lauseen 3.1.1 perusteella sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, sillä kaikille $j \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

. . . .

Seuraavaa juuritestiä on usein hieman vaikeampi käyttää kuin edellisiä testejä, mutta se on kuitenkin monissa tapauksissa erittäin hyödyllinen.

Lause 3.1.9. (Juuritesti) *Olkoot $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Jos on olemassa luvut $\rho < 1$ ja $N \in \mathbb{N}$, joille

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho \quad \textit{kaikilla } n \geq N\,,$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee (itseisesti).

(b) Jos on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \textit{kaikilla } n \geq N\,,$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Erityisesti, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee (itseisesti), jos $L < 1$, ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, jos $L > 1$.

TODISTUS.

(a) Oletusten perusteella $|a_n| \leq \rho^n$ kaikilla $n \geq N$, joten sarjalla $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ on majoranttina suppeneva geometrinen sarja $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^n$. Niinpä Majoranttiperiaatteen (Lause 2.3.2) nojalla sarja $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ suppenee, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee (itseisesti).

(b) Oletuksista saadaan, että $|a_n| \geq 1^n = 1$ kaikilla $n \geq N$. Niinpä termit a_n eivät lähesty nollaa, kun n kasvaa rajatta, eikä sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ näin ollen voi supeta 0-testin (Lause 2.2.5) nojalla.

Raja-arvoversioiden todistus on jätetty Ongelmaksi 3.1.10. □

. . . .

Ongelma 3.1.10. Todista Lauseen 3.1.9 raja-arvoversiot.

. . . .

Esimerkki 3.1.11. (a) Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

suppenee Lauseen 3.1.9 nojalla, koska

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1 .$$

(b) Määritellään kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)/2}, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n/2}, & \text{jos } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Tällöin siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots .$$

Kokeillaan ensin suhdetestejä. Koska

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^k \to \infty$$

ja

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0,$$

kun $k \to \infty$, peräkkäisten termien osamäärillä ei ole raja-arvoa. Lisäksi joka toinen osamäärä on suurempi kuin 1 ja joka toinen pienempi kuin 1, joten Suhdetestin mikään versio ei anna tietoa sarjan suppenemisesta.

Juuritestin avulla sarjan kuitenkin nähdään suppenevan: Kaikille n on

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} < 1$$

eli juuritestin nojalla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee.

....

Esimerkki 3.1.12. Kuinka monta (ensimmäistä) termiä riittää ottaa huomioon, jotta saadaan sarjan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

summalle arvio, joka on alle tuhannesosan päässä sarjan summasta?

Ratkaisu. Suhdetestin ja tiedon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{ne} = \frac{1}{e} < 1$$

nojalla nähdään, että kyseinen sarja suppenee. Koska kaikille $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=2}^{m-1} \frac{n}{e^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n}{e^n},$$

riittää löytää positiivinen kokonaisluku m siten, että

$$0 < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n}{e^n} \leq 10^{-3}.$$

Arvioidaan tätä summaa ylöspäin integraalitestin avulla. Huomataan (esimerkiksi derivaattaa tutkimalla), että funktio

$$f\colon [1,\infty[\to [0,\infty[,\ f(x) = \frac{x}{e^x},$$

on vähenevä, ja siksi

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=m}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{n}{e^n}\, dx \leq \int_{m-1}^{\infty} \frac{x}{e^x}\, dx$$

kun $m \geq 2$. Osittaisintegrointi antaa

$$\int_{m-1}^{c} xe^{-x}\, dx = \int_{m-1}^{c} x\,(-e^{-x})'\, dx = -\frac{c}{e^c} + \frac{m-1}{e^{m-1}} + \int_{m-1}^{c} e^{-x}\, dx = -\frac{c+1}{e^c} + \frac{m}{e^{m-1}} \xrightarrow{c\to\infty} \frac{m}{e^{m-1}}.$$

Kokeilemalla huomaamme, että

$$\frac{11}{e^{10}} < \frac{1}{1000}$$

ja näin ollen luvuksi m voidaan valita $m = 11$. Riittää siis ottaa huomioon 9 ensimmäistä termiä summasta.

. . . .

Kirjallisuudesta löytyy edellä esiteltyjen suppenemistestien lisäksi muitakin testejä. Tässä eräs niistä:

Lause 3.1.13. (2^m-testi) *Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vähenevä jono ei-negatiivisia lukuja (ts. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$), joille*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos ja vain jos sarja $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ suppenee.

Todistus. Lauseen todistus perustuu samanlaiseen argumenttiin kuin yliharmonisen sarjan suppenemisen näyttäminen.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että sarja $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ suppenee. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ ja valitaan se kokonaisluku M, jolle

$$2^{M-1} \leq N < 2^M\,.$$

Tällöin, koska jono (a_n) on vähenevä, niin

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{2^M-1} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{M-1}} + \cdots + a_{2^M-1})$$
$$\leq 2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + \cdots + 2^{M-1} a_{2^{M-1}} = \sum_{m=0}^{M-1} 2^m a_{2^m} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} = S < \infty\,,$$

joten osasummien $\sum_{n=1}^{N} a_n$ jono on rajoitettu ja siten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee.

"$\Rightarrow$": Oletetaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Olkoon $M \in \mathbb{N}$. Tällöin jonon (a_n) vähenevyydestä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} 2^m a_{2^m} &= \sum_{m=1}^{M} 2^{m-1} a_{2^m} \\
&= a_2 + 2a_4 + 2^2 a_8 + \cdots + 2^{M-1} a_{2^M} \\
&\leq (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots \\
&\quad + (a_{2^{M-1}+1} + a_{2^{M-1}+2} + \cdots + a_{2^M}) \\
&= \sum_{n=1}^{2^M} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S < \infty\,.
\end{aligned}$$

Osasummien $\sum_{m=1}^{M} 2^m a_{2^m}$ jono on siis rajoitettu luvulla $2S$ ja siksi sarja $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ suppenee. □

. . . .

Esimerkki 3.1.14. Tarkastellaan jälleen p-harmonista sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,, \qquad \text{missä } p > 0\,.$$

Käytetään 2^m-testiä (Lause 3.1.13) valinnalla $a_n = n^{-p}$:
Jono (a_n) on vähenevä ja $a_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Lisäksi

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2^m)^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{p-1}}\Big)^m\,,$$

tämä on geometrinen sarja, joka suppenee, jos ja vain jos $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ eli $p > 1$. Lauseen 3.1.13 nojalla (kuten jo aiemminkin huomattiin) yliharmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,, \quad p > 1\,, \quad \text{suppenee}$$

ja aliharmoninen (ja harmoninen) sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,, \quad 0 < p \leq 1\,, \quad \text{hajaantuu.}$$

. . . .

Ongelma 3.1.15. Tutki sekä 2^m-testin että integraalitestin avulla sarjan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

suppenemista.

3.2 Sarjan ehdollinen suppeneminen ja sarjan summausjärjestyksestä

Edellä esitellyillä testeillä voi tutkia vain positiivitermisten sarjojen suppenemista tai sarjojen itseistä suppenemista. Vuorotteleville sarjoille on olemassa omia suppenemistestejä.

. . . .

Lause 3.2.1 (Leibnitzin testi)**.** *Olkoon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vähenevä jono ei-negatiivisia reaalilukuja (ts. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_j \geq \cdots \geq 0$), joille*

$$\lim_{n\to\infty} a_j = 0\,.$$

Tällöin vuorotteleva sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}a_j$$

suppenee ja sen summalle pätee

$$S_{2n} \leq \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}a_j \leq S_{2n-1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, missä S_k on sarjan k. osasumma.

Todistus. Koska jono $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on vähenevä,

$$S_{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n+1}(-1)^{j+1}a_j = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}.$$

Näin ollen parittomien osasummien jono $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä. Vastaavasti nähdään, että parillisten osasummien jono $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava:

$$S_{2n+2} = \sum_{j=1}^{2n+2}(-1)^{j+1}a_j = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}\,.$$

Näin ollen

$$S_1 \geq S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n} \geq S_{2n} \geq S_2\,,$$

joten molemmat jonot $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ovat myös rajoitettuja. Niinpä niillä on raja-arvot,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \tilde{S}\,.$$

Näytetään lopuksi, että $S = \tilde{S}$. Oletusta $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ käyttäen saadaan, että

$$S - \tilde{S} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n-1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$$

Tästä seuraa, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}a_j$ suppenee ja sen summa on S. Lisäksi jonon $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ kasvavuudesta ja jonon $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ vähenevyydestä seuraa, että

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}.$$

□

. . . .

Esimerkki 3.2.2 (Vuorotteleva harmoninen sarja)**.** Sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}$$

sanotaan **vuorottelevaksi harmoniseksi sarjaksi**. Se suppenee Leibnitzin testin perusteella, sillä $(\frac{1}{j})_{j\in\mathbb{N}}$ on vähenevä jono ei-negatiivisia reaalilukuja ja $\frac{1}{j}\xrightarrow{j\to\infty}0$.

. . . .

Ongelma 3.2.3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{j}}?$$

Entä suppeneeko se itseisesti?

. . . .

Äärellisessä summassa voi summausjärjestystä vaihtaa eikä summa siitä miksikään muutu. Mitä tämä sitten tarkoittaa sarjoilla? Voidaanko sarjassa vaihtaa summattavien termien järjestystä ja millä tavalla vaihto vaikuttaa suppenemiseen/hajaantumiseen? Määritellään ensin, mitä tarkoitetaan summausjärjestyksen vaihdolla.

. . . .

Määritelmä 3.2.4. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ on saatu sarjasta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **summausjärjestystä vaihtamalla**, jos on olemassa bijektio $j\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, jolle

$$b_{j(n)} = a_n \qquad \text{kaikilla } n\,.$$

Sarjojen summattavat termit ovat siis samat, mutta ne ovat eri järjestyksessä. Tutkitaan seuraavaksi varoittavaa esimerkkiä summausjärjestyksen vaihtamisesta.

. . . .

Esimerkki 3.2.5. Tarkastellaan vuorottelevaa harmonista sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots,$$

jonka tiedetään suppenevan; olkoon sarjan summa S. Oletetaan hetkeksi, että termien järjestyksen muuttaminen ei muuta sarjan suppenemista tai sen summaa. Järjestetään sarjan termit uudelleen niin, että positiivisen termin jälkeen tulee aina kaksi negatiivista termiä (positiivisten ja negatiivisten termien keskinäistä järjestystä muuttamatta):

$$\begin{aligned}
S &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\\
&= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\dots\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\right) = \frac{1}{2}S
\end{aligned}$$

Näin ollen olisi $S = \frac{1}{2}S$, josta saataisiin $S = 0$. Kuitenkin lauseen 3.2.1 mukaan $S \geq S_2 = \frac{1}{2}$. Niinpä oletus, että termien järjestyksen muuttaminen ei muuta sarjan summaa, ei pidä paikkaansa.

. . . .

Itseisesti suppenevalle sarjalle termien summausjärjestyksellä ei ole merkitystä.

Lause 3.2.6. *Oletetaan, että jonon $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ määräämä sarja on saatu jonon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ määräämästä sarjasta summausjärjestystä vaihtamalla. Jos*

$$\textit{sarja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \textit{suppenee itseisesti, niin sarja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j \quad \textit{suppenee itseisesti}$$

ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \,.$$

Todistus. Olkoot $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sarjan $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ osasummien jono ja S jonon raja-arvo. Olkoon $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uudelleen järjestetyn sarjan $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ osasummien jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jonon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ määräämä sarja suppenee itseisesti, voidaan valita $M > 0$, jolle

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

jolloin myös

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq M\,.$$

Valitaan N niin suureksi, että kaikki M ensimmäistä a_j-termiä ovat N ensimmäisen b_j-termin joukossa, ts.

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_M\} \subset \{b_1, b_2, \ldots, b_N\}\,.$$

Tällöin kaikilla $n \geq N$

$$|T_n - S_M| = \underbrace{\Big|\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{M} a_j\Big|}_{(*)} \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

sillä kohdassa $(*)$ on summa joistakin luvuista a_j, joille $j > M$. Niinpä

$$|T_n - S| \leq |T_n - S_M| + |S_M - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

$\square$

. . . .

Ehdollisesti suppenevat sarjat sen sijaan eivät tule hyvin toimeen summausjärjestyksen vaihtamisen kanssa.

. . . .

Lause 3.2.7 (Riemannin uudelleenjärjestyslause)**.** *Oletetaan, että* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee ehdollisesti.*

(a) Jokaiselle $S \in \mathbb{R}$ *voidaan sarjasta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *summausjärjestystä vaihtamalla muodostaa sarja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, joka suppenee kohti lukua* S*.*

(b) Sarjasta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *saadaan summausjärjestystä vaihtamalla sarja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, joka hajaantuu.*

TODISTUS.

(a) Kiinnitetään $S \in \mathbb{R}$. Olkoot $a_1^+, a_2^+, \dots$ jonon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei-negatiiviset termit alkuperäisessä järjestyksessään ja $a_1^-, a_2^-, \dots$ jonon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ negatiivisten termien osajono. Sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

hajaantuvat: jos ne molemmat suppenisivat, sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenisi itseisesti. Jos taas toinen edellä mainituista sarjoista suppenisi ja toinen hajaantuisi, niin sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osasummien jono kasvaisi tai vähenisi rajatta.

Koska alkuperäinen sarja suppenee, sen termien raja-arvo on nolla; siten

$$\lim_{n\to\infty} a_n^+ = 0 \quad \text{ja} \ \lim_{n\to\infty} a_n^- = 0\,.$$

Näiden alkuvalmistelujen jälkeen voidaan järjestää sarjan termit uudelleen: Valitaan ensin ei-negatiiviset termit $a_1^+, a_2^+, \dots, a_{k_1}^+$, missä k_1 on ensimmäinen indeksi, jolle

$$\sum_{n=1}^{k_1} a_n^+ > S\,.$$

Tällainen k_1 löytyy, koska ei-negatiivisten termien sarja hajaantuu. Nyt siis $b_n = a_n^+$, kun $n = 1, \dots, k_1$.

Sitten summataan negatiivisia termejä $a_1^-, a_2^-, \dots, a_{l_1}^-$ missä l_1 on ensimmäinen indeksi, jolle

$$\sum_{n=1}^{k_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{l_1} a_n^- < S\,.$$

Siis $b_{k_1+n} = a_n^-$, kun $n = 1, \dots, l_1$.

Jatketaan summaamalla ei-negatiivisia termejä, kunnes päästään kokonaissummassa taas yli luvun S (siis $\sum\limits_{n=1}^{k_1} a_n^+ + \sum\limits_{n=1}^{l_1} a_n^- + \sum\limits_{n=k_1+1}^{k_2} a_n^+ > S$); sitten negatiivisia, kunnes päästään luvun S alapuolelle ($\sum\limits_{n=1}^{k_1} a_n^+ + \sum\limits_{n=1}^{l_1} a_n^- + \sum\limits_{n=k_1+1}^{k_2} a_n^+ + \sum\limits_{n=l_1+1}^{l_2} a_n^- < S$) ja niin edelleen.

Ei-negatiivisia termejä summattaessa ($(m+1)$. kertaa) uudelleen järjestetyn sarjamme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ osasummien S_M arvo on lukujen $S + a_{l_m}^-$ ja $S + a_{k_{m+1}}^+$ välissä eli

$$S + a_{l_m}^- \le S_M \le S + a_{k_{m+1}}^+, \qquad k_m + l_m < M \le k_{m+1} + l_m.$$

Negatiivisia termejä summattaessa (m. kertaa) uudelleen järjestetyn sarjamme osasummien S_M arvo on lukujen $S + a^-_{l_m}$ ja $S + a^+_{k_m}$ välissä eli

$$S + a^-_{l_m} \leq S_M \leq S + a^+_{k_m}, \qquad k_m + l_{m-1} < M \leq k_m + l_m.$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} a^+_n = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} a^-_n = 0\,,$$

osasummien etäisyys luvusta S menee mielivaltaisen pieneksi, kunhan konstruktiossa vain mennään riittävän pitkälle. Tästä seuraa, että uudelleen järjestetty sarja suppenee lukuun S.

(b) Harjoitustehtävä

□

. . . .

Esimerkki 3.2.8. Vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\,,$$

suppenee ehdollisesti.

Lisäksi huomataan, että sen parillisten termien muodostama sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right),$$

hajaantuu harmonisena sarjana. Samoin käy parittomien termien sarjalle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1},$$

sillä

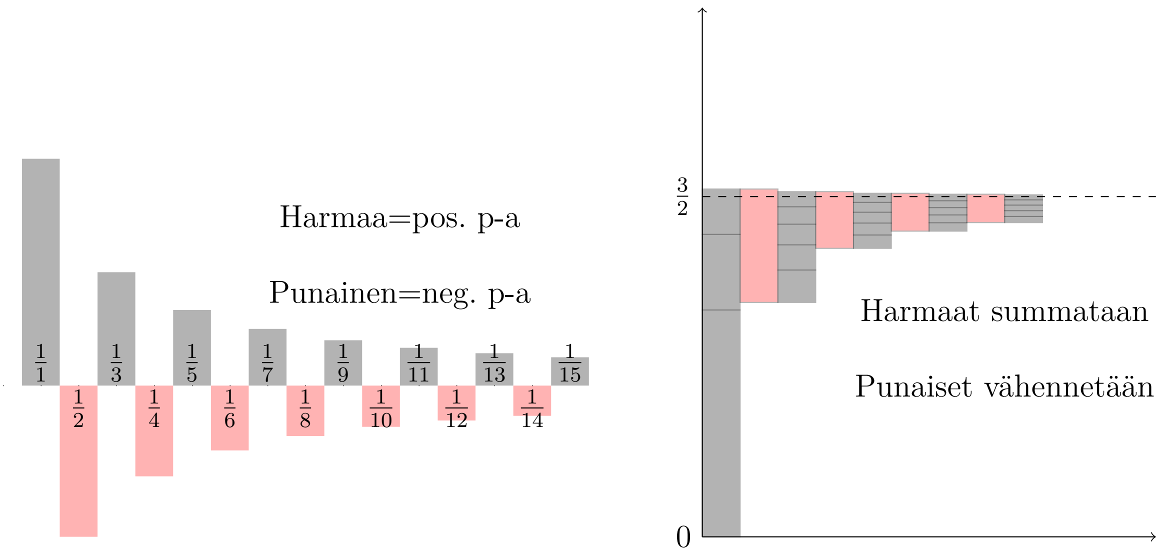
$$\sum_{n=1}^{l} \frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{l} \frac{1}{2n} \to \infty,$$

kun $l \to \infty$.

Kuvassa 3.1 järjestellään termejä

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

siten, että sarja suppenee kohti lukua $\frac{3}{2}$.



Kuva 3.1: Miten vuorottelevan harmonisen sarjan voi järjestellä uudestaan siten, että se saadaan suppenemaan lukuun $\frac{3}{2}$.

SUPPENEMISTARKASTELIJAN MUISTILISTA

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \text{tai ei olemassa} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{hajaantuu}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \begin{cases} > 0 \quad (\text{ja} \ < \infty) & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{suppenee} \ \Leftrightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{suppenee} \\ = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{suppenee} & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{suppenee} \\ = \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{hajaantuu} & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{hajaantuu} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{suppenee} \\ > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{hajaantuu} \\ = 1 & \Rightarrow \text{ei johtopäätöksiä} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{suppenee} \\ > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{hajaantuu} \\ = 1 & \Rightarrow \text{ei johtopäätöksiä} \end{cases}$$

Jos $f\colon [1,\infty[\ \to [0,\infty[$ on vähenevä (ja jatkuva) funktio, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ \text{suppenee} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \ \text{suppenee}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{vähenevä}, \ a_n \geq 0 \ \text{ja} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sarja} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \ \text{suppenee}$$

3.3 Lukusarjojen tulo

Lukusarjojen tulon kohdalla ensimmäinen ongelma on tulon järkevä määrittely. Tavoitteena olisi määritellä tulo sarjana, jonka summa olisi kerrottavien sarjojen summien tulo.

Ensimmäisenä mieleen tuleva ajatus saattaisi olla määritellä sarjojen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tuloksi sarja $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, jossa $c_j = a_j b_j$. Tällöin kuitenkaan yhtälö $\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j$ ei yleensä ole totta.

. . . .

Esimerkki 3.3.1. Olkoot $a_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j$ ja $b_j = \left(\frac{1}{3}\right)^j$, jolloin $c_j = a_j b_j = \left(\frac{1}{6}\right)^j$. Nyt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \tfrac{3}{2}, \qquad \text{ja} \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \tfrac{6}{5},$$

joten

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) \neq \sum_{j=0}^{\infty} c_j.$$

. . . .

Sarjojen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ muodollinen tulo

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

tarkoittaisin kaikkien muotoa $a_j b_k$ olevien termien summaamista eli "kaksoissarjaa"

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_j b_k.$$

Tämän kaksoissarjan termit voidaan järjestää jonoksi monella eri tavalla, mutta jatkon kannalta eräs tietty tapa on erityisen tärkeä.

. . . .

Määritelmä 3.3.2. Olkoot $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sarjoja. Merkitään

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j+1} = \sum_{j+i=n+1} a_j b_i\,.$$

Sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sanotaan sarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **Cauchyn tuloksi**.

. . . .

Esimerkki 3.3.3. Olkoon jälleen $a_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j$ ja $b_j = \left(\frac{1}{3}\right)^j$. Tällöin

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \tfrac{1}{2^j} \tfrac{1}{3^{n-j}} \\ &= \frac{1}{3^n} \sum_{j=0}^{n} \left(\tfrac{3}{2}\right)^j = \frac{1}{3^n} \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \\ &= ... = \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot 2 - 2 \cdot \tfrac{3}{2} = 3 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right).$$

. . . .

Lause 3.3.4. *Olkoot* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ja* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *kaksi itseisesti suppenevaa sarjaa. Tällöin niiden Cauchyn tulo* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *suppenee itseisesti ja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) .$$

Todistus. Olkoot A_n ja B_n n. osasummat sarjoista $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tutkitaan ensin teleskooppisarjaa

$$A_1 B_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (A_j B_j - A_{j-1} B_{j-1}) , \tag{3.1}$$

jolle

$$A_1 B_1 + \sum_{j=2}^{N} (A_j B_j - A_{j-1} B_{j-1}) = A_N B_N = (a_1 + a_2 + \ldots + a_N)(b_1 + b_2 + \ldots + b_N).$$

Erityisesti

$$A_1 B_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (A_j B_j - A_{j-1} B_{j-1}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Nyt kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee (ks. Kuva 3.2)

$$\begin{aligned} |A_1 B_1| + \sum_{j=2}^{N} |A_j B_j - A_{j-1} B_{j-1}| &\leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} |a_j||b_k| \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N} |a_j|\right) \left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right) = S < \infty, \end{aligned}$$

joten sarjan (3.1) itseisarvojen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sarja

$\cdot$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	$\cdots$
b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	a_5b_1	a_6b_1	a_7b_1	a_8b_1	a_9b_1	
b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	a_4b_2	a_5b_2	a_6b_2	a_7b_2	a_8b_2	a_9b_2	
b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	a_4b_3	a_5b_3	a_6b_3	a_7b_3	a_8b_3	a_9b_3	
b_4	a_1b_4	a_2b_4	a_3b_4	a_4b_4	a_5b_4	a_6b_4	a_7b_4	a_8b_4	a_9b_4	
b_5	a_1b_5	a_2b_5	a_3b_5	a_4b_5	a_5b_5	a_6b_5	a_7b_5	a_8b_5	a_9b_5	
b_6	a_1b_6	a_2b_6	a_3b_6	a_4b_6	a_5b_6	a_6b_6	a_7b_6	a_8b_6	a_9b_6	
b_7	a_1b_7	a_2b_7	a_3b_7	a_4b_7	a_5b_7	a_6b_7	a_7b_7	a_8b_7	a_9b_7	
b_8	a_1b_8	a_2b_8	a_3b_8	a_4b_8	a_5b_8	a_6b_8	a_7b_8	a_8b_8	a_9b_8	
b_9	a_1b_9	a_2b_9	a_3b_9	a_4b_9	a_5b_9	a_6b_9	a_7b_9	a_8b_9	a_9b_9	
$\vdots$										

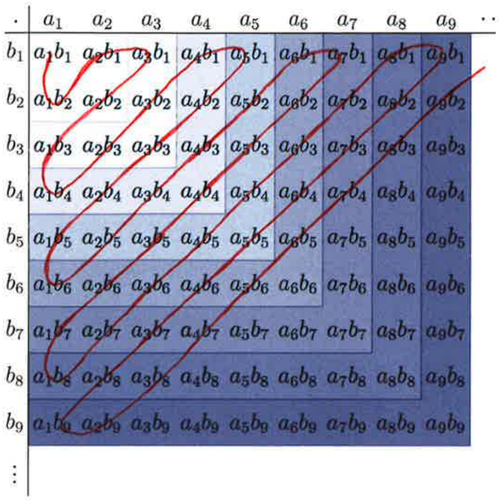
Kuva 3.2: Sarjojen termien tulot

(3.1) suppenee itseisesti. Lauseen 3.2.6 mukaan itseisesti suppeneville sarjoille termien summausjärjestystä voidaan vaihtaa eikä suppeneminen ja sarjan summa tästä muutu. Cauchyn tulo saadaan sarjasta (3.1) summausjärjestystä vaihtamalla (Kuva 3.3). Niinpä

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A_1B_1 + \sum_{j=2}^{\infty}(A_jB_j - A_{j-1}B_{j-1}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

□

. . . .



Kuva 3.3: Cauchyn tulon summausjärjestys

. . . .

Esimerkki 3.3.5. Geometrisestä sarjasta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ tiedetään, että se suppenee itseisesti kaikille $x \in \left]-1,1\right[$, ja että näille x pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Tämän sarjan Cauchyn tulo itsensä kanssa on $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, missä

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{x^{j-1}}_{a_j} \underbrace{x^{(k-j+1)-1}}_{b_{k-j+1}} = \sum_{j=1}^{k} x^{k-1} = kx^{k-1}.$$

Lauseen 3.3.4 nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ suppenee itseisesti kaikilla $x \in \left]-1,1\right[$ ja

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

. . . .

Ongelma 3.3.6. Muodosta yliharmonisen sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Cauchyn tulo itsensä kanssa. Suppeneeko näin saatu sarja?

Harjoitustehtäviä

1. Tutki sarjan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+1}{j^2+1}$$

suppenemista (a) Majorantti/Minorantti-, (b) osamäärä- ja (c) suhdetestillä.

2. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} c^n$ $(\alpha \geq 0, 0 \leq c < 1)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c^n}{n!}$ $(c \geq 0)$

3. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{e^k}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n^n}$

4. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$

(b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\log^n(n)}$

5. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$

(b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

(Vihje: Käytä integraalitestiä, epäoleellisen integraalin suppenemisen selvittämiseksi tee sijoitus $x = e^t$. Totea saatu epäoleellinen integraali suppenevaksi vastaavan sarjan avulla.)

6. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$

(b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n}}$

7. Suppeneeko sarja?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

8. Tutki sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$$

suppenemista, kun $a > 0$.

(Vihje: Käy ensin läpi tapaukset $a < e$ ja $a > e$ ja mieti sitten, miten käy, jos $a = e$.)

9. Osoita, että vuorotteleva sarja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \cdots$$

hajaantuu. Miksi Leibnitzin testi ei toimi tässä vaikka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

(Vihje: Viikon 2 Harjoitustehtävä **31).**

10. Myöhemmin osoitetaan, että vuorottelevan harmonisen sarjan summa on $\log 2$. Käytä tätä tietoa ja Lauseen 3.2.1 todistusta hyväksi ja anna luvulle $\log 2$ arvio, jonka virhe on pienempi kuin 10^{-2}.

11. Suppeneeko sarja? Entä itseisesti?

(a) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\log n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+2}$

12. Suppeneeko sarja? Entä itseisesti?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)^n}{n}$

13. Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla seuraavat sarjat suppenevat?

(a) $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{e^j}\right)^j$

(b) $\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^j}{2^j j^2}$

14. Suppeneeko sarja? Entä itseisesti?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{2^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^4+3}{n!}$

15. Olkoon (a_n) vähenevä jono ja $a_n \geq 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Päteekö käänteinen?

16. (a) Tutkitaan harmonisen sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

suppenemista. Koska harmonisessa sarjassa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä jono ja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

niin Leibnitzin testin nojalla harmoninen sarja suppenee. Noinkohan? Missä mättää?

(b) Saadaanko sarjasta $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ aina suppeneva, jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee ehdollisesti ja jono $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu?

17. Todista seuraava suppenemistesti: Olkoot $a_n > 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(1/n)} = A > 1,$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. (Tämän testin todisti alunperin Augustin Louis Cauchy yhdessä monien muiden suppenemistestien kanssa.)

18. Tutki tehtävän **17.** suppenemistestin avulla sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^{\alpha}}$$

suppenemista, kun $\alpha > 1$.

19. Osoita, että juuritesti toimii aina, kun suhdetestikin toimii. Toisin sanoen, jos sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, on olemassa luvut $0 \leq \rho_1 < 1$ ja $N_1 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \rho_1 \quad \text{kaikille } n \geq N_1,$$

niin osoita, että on olemassa luvut $0 \leq \rho_2 < 1$ ja $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho_2 \quad \text{kaikille } n \geq N_2.$$

20. Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vähenevä jono ei-negatiivisia reaalilukuja, joille

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono reaalilukuja siten, että sen määräämän sarjan osasummien jono on rajoitettu. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

suppenee.

21. Olkoot $a_n \geq 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $p > 1$. Osoita, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right]^p.$$

(Vihje: Huomaa, että voi olettaa sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ summan olevan 1. Miksi?)

22. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{1+\log n}$$

suppenee ehdollisesti ja selitä, miten saat järjesteltyä sarjan termit uudelleen siten, että uudelleen järjestelty sarja suppenee lukuun -7.

23. Muodosta sarjojen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Cauchyn tulo. Suppeneeko näin saatu sarja?

24. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}?$$

Muodosta tämän sarjan Cauchyn tulo itsensä kanssa. Suppeneeko näin saatu sarja?

25. Olkoot $p, q \in \left]-1, 1\right[$. Muodosta geometristen sarjojen

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^n \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

Cauchyn tulo. Suppeneeko näin saatu sarja? Onko saatu sarja geometrinen?

26. Oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee ehdollisesti. Miten saat järjesteltyä sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termit uudelleen siten, että uudelleen järjestelty sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hajaantuu?

27. Oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee ehdollisesti. Olkoot $a_1^+, a_2^+, \ldots$ jonon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei-negatiiviset termit ja $a_1^-, a_2^-, \ldots$ jonon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ negatiiviset termit alkuperäisessä järjestyksessään. Osoita, että sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+ \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$$

hajaantuvat.

Viikko 4

Funktiojonot ja niiden suppeneminen

4.1 Funktiojonojen pisteittäinen suppeneminen

Reaalilukujonon suppenemisen ja raja-arvon käsitteet ovat tuttuja aiemmilta kursseilta. Tuttu on myös tilanne, jossa jonon yleisen jäsenen lauseke riippuu jostakin parametrista, joka vaikuttaa jonon suppenemiseen ja raja-arvoon. Näin on esimerkiksi geometrisen lukujonon $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, kohdalla. Tässä luvussa aihetta tarkastellaan uudesta näkökulmasta, tulkitsemalla parametri muuttujaksi.

. . . .

Esimerkki 4.1.1. Olkoon $x \in [0, 1]$. Tutkitaan jonon $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenemista.

Jos $x = 0$, niin $x^n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos taas $x = 1$, niin $x^n = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Molemmissa tapauksissa jono $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ on vakiojono, ja se suppenee.

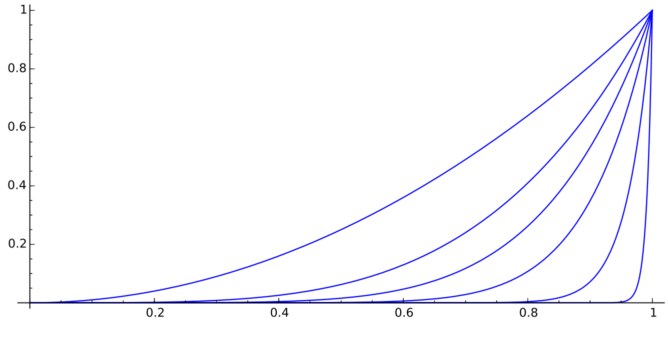
Jos $0 < x < 1$, niin myös tällöin jono suppenee, sillä $x^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämä nähdään seuraavasti: Olkoon $0 < \varepsilon < 1$. Nyt

$$|x^n - 0| = x^n < \varepsilon,$$

kun

$$n \log x < \log \varepsilon,$$

eli kun $n \geq N = \frac{\log \varepsilon}{\log x} \quad (> 0)$.



Kuva 4.1: Funktiojono $f_n(x) = x^n$.

Näin ollen jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kaikilla $x \in [0,1]$ ja

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } 0 \le x < 1\,, \\ 1\,, & \text{jos } x = 1\,. \end{cases}$$

. . . .

Huomaa, että annettua ε vastaava luku N riippuu tarkastelupisteestä x. Toisin sanoen järjestysluku (indeksi N), josta alkaen jonon loppuosa on annettua lukua $\varepsilon > 0$ lähempänä raja-arvoa 0, riippuu luvun x arvosta.

. . . .

Ongelma 4.1.2. Tutki jonon $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenemista, kun $x > 1$. Entä mitä jonolle $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tapahtuu, kun $x < 0$?

. . . .

Esimerkin 4.1.1 jonot voidaan kirjoittaa funktioiden avulla. Kun määritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$$

niin saadaan jono funktioita $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Funktiojonosta $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ saadaan jokaisella $x \in [0,1]$ lukujono $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

. . . .

Määritelmä 4.1.3. Jos $A \subset \mathbb{R}$ on joukko ja $f_n\colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat funktioita, niin

$$(f_n) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n=1}^{\infty},$$

on **funktiojono**.

Sanotaan, että **funktiojono** (f_n) **suppenee (pisteittäin) joukossa** A, jos lukujonot $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenevat jokaisella $x \in A$. Toisin sanoen, jokaisella $x \in A$ on olemassa reaaliluku $f(x)$, jolle

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

. . . .

Huomautus 4.1.4. (a) Suppenevien lukujonojen $(f_n(x))$ raja-arvot $f(x)$ määrittelevät siis uuden funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$. Sanotaankin, että **funktiojono** (f_n) **suppenee (pisteittäin) kohti funktiota** f ja tätä merkitään

$$f_n \to f \quad \text{tai} \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f\,.$$

(b) Määritelmän 4.1.3 mukaan funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin (joukossa A) kohti funktiota f, jos jokaisella $x \in A$ ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge N.$$

Pisteittäisessä suppenemisessa kussakin pisteessä $x \in A$ on jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti siis luku N, jota suuremmilla indekseillä jonon (f_n) funktioiden arvot pisteessä x poikkeavat rajafunktion f arvosta pisteessä x vähemmän kuin ε. Se, kuinka suuri luvun N tulee olla, saa riippua pisteestä x.

(c) Lukujonojen **Cauchyn kriteeriosta** saadaan funktiojonon suppenemiselle seuraava ehto:

Funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin joukossa A (kohti jotakin funktiota $f\colon A \to \mathbb{R}$), jos jokaisella x ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ niin, että

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n, m \geq N.$$

. . . .

Esimerkki 4.1.5. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{nx^3 + 1}{n}.$$

Osoita, että funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ joukossa $\mathbb{R}$.

Ratkaisu. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin valitsemalla $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{1}{\varepsilon}$, saadaan

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^3 + 1}{n} - x^3\right| = \left|(x^3 + \tfrac{1}{n}) - x^3\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{kunhan } n \geq N.$$

Tämä pätee siis kaikille $x \in \mathbb{R}$, joten funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee (pisteittäin) kohti funktiota f

Huomaa, että tässä luvun N valinta ei riippunut tarkastelupisteestä x.

. . . .

Ongelma 4.1.6. Olkoon $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{4n}.$$

Määritä perustellen funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikille } x \in [0,1].$$

. . . .

Esimerkissä 4.1.5 funktiot f_n ovat jatkuvia ja myös rajafunktio f on jatkuva, kun taas Esimerkissä 4.1.1 rajafunktio f on epäjatkuva, vaikka funktiot f_n ovatkin kaikki jatkuvia. Jatkuvuus ei siis ainakaan automaattisesti periydy rajafunktiolle. Huomaa kuitenkin, että Esimerkissä 4.1.5 suppenemisvauhti ei riippunut pisteestä x, kun taas Esimerkissä 4.1.1 suppenemisvauhti riippui pisteestä x.

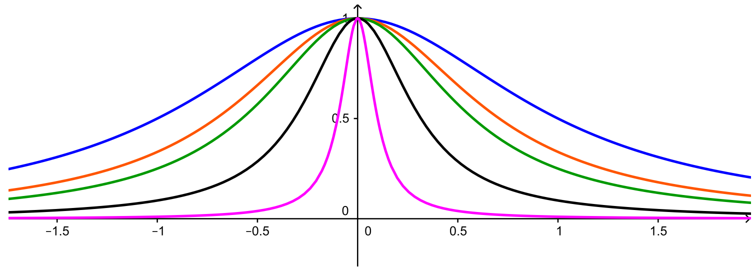
Seuraavat esimerkit kertovat, että myöskään derivoituvuus ja määrätty integraali eivät periydy, ainakaan ilman lisäoletuksia.

. . . .

Esimerkki 4.1.7. (a) (**Derivoituva jono, epäjatkuva rajafunktio**)
Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$. Tutkitaan funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenemista.

Ratkaisu. Jos $x \neq 0$, niin nx^2 kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$. Näin ollen $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} \to 0$ kun $n \to \infty$ kaikille $x \neq 0$. Jos taas $x = 0$, niin $f_n(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ kaikilla n, ja siksi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Niinpä derivoituvista funktioista koostuva funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin kohti epäjatkuvaa rajafunktiota

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ 0, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$



Kuva 4.2: Esimerkin funktiojonon funktiot f_1, f_2, f_3, f_{10} ja f_{100}.

Lukujonon $(f_n(x))$ suppenemisvauhti riippuu pisteestä x: jos $x \neq 0$ ja $0 < \varepsilon < 1$, niin

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{1+nx^2} - 0 \right| = \frac{1}{1+nx^2} < \varepsilon$$

täsmälleen silloin, kun $1 + nx^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ eli $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{x^2}$. Näin ollen mitä lähempänä nollaa x on, sitä suuremmaksi n tulee valita, jotta $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ toteutuisi. Lisäksi lukua n ei voida valita niin, että kyseinen epäyhtälö olisi voimassa *kaikilla* $x \neq 0$ samanaikaisesti.

(b) (**Kolmioesimerkki**) Olkoon $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & \text{kun } 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ 2n - 2n^2 x, & \text{kun } \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{kun } \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Näytetään, että $f_n \to 0$ (rajafunktio on siis nollafunktio eli $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$).

Ratkaisu. Koska $f_n(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

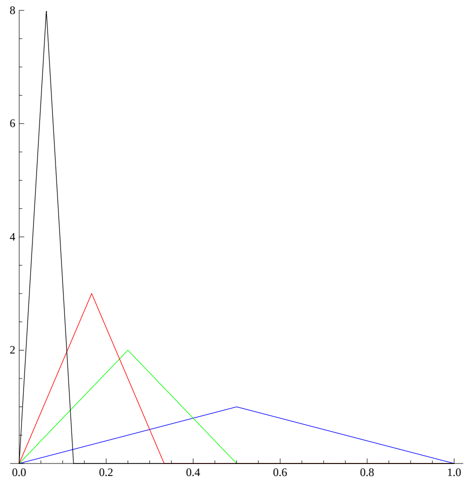
Olkoon sitten $0 < x \le 1$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Kun valitaan $N \in \mathbb{N}$, jolle $N > \frac{1}{x}$, niin tällöin $x > \frac{1}{N}$ ja

$$|f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \ge N.$$

Lukujonon $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo on siis 0 kaikilla $x \in [0,1]$. Näin ollen funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rajafunktio on $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Lukua N ei kuitenkaan voida valita pisteestä x riippumattomaksi, sillä kaikilla n löytyy piste $x_n = \frac{1}{2n}$ siten, että

$$|f_n(x_n) - 0| = f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \to \infty, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$



Huomaa, että esimerkkimme funktioille pätee

$$\int_0^1 f_n(t)\, dt = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

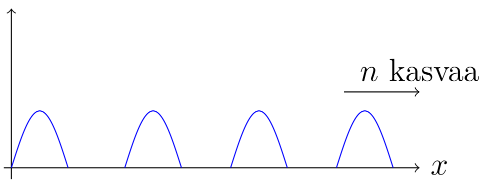
(c) Olkoon $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi x)\,, & \text{jos } x \in [2n, 2n+1] \\ 0\,, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Näytetään, että $f_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Jos $2n > x$, niin $f_n(x) = 0$. Siis valitsemalla $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{x}{2}$, saadaan

$$|f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon\,, \qquad \text{kaikilla } n \geq N.$$



Funktion f_n arvo ei kuitenkaan ole lähellä lukua 0 **koko** määrittelyjoukossa, oli n kuinka suuri tahansa: jokaiselle n voidaan valita piste $x_n = 2n + \frac{1}{2}$, jolle

$$|f_n(x_n) - 0| = \left|f_n\left(2n + \tfrac{1}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(2n\pi + \tfrac{\pi}{2}\right)\right| = |\sin \tfrac{\pi}{2}| = 1 > \varepsilon\,.$$

Tästä syystä lukua N ei voida valita pisteestä x riippumattomaksi (mikäli $\varepsilon < 1$)

Huomaa lisäksi, että tässäkin esimerkissä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_{2n}^{2n+1} \sin(\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi} \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

. . . .

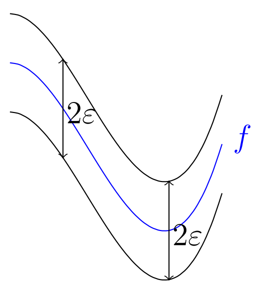
4.2 Funktiojonon tasainen suppeneminen

Esimerkin 4.1.7 funktiojonojen suppenemisvauhti riippui siis pisteestä x eivätkä monetkaan funktiojonon funktioiden ominaisuudet periytyneet rajafunktiolle. Seuraavaksi määritellään pisteittäistä suppenemista vahvempi suppenemisen käsite, jossa vaaditaan, että suppenemisvauhdeille eri pisteissä voidaan löytää yhteinen yläraja.

Määritelmä 4.2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Olkoon $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Sanotaan, että funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **suppenee tasaisesti joukossa** A **kohti funktiota** $f \colon A \to \mathbb{R}$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in A\,, \text{ kun } n \geq N_\varepsilon\,.$$

Huomaa, että tasaisessa suppenemisessa lukua ε vastaava luku N_ε pitää voida valita pisteestä x riippumattomalla tavalla. Tämä tarkoittaa sitä, että funktiot f_n ovat indeksistä N_ε alkaen koko määrittelyjoukossa lähellä funktiota f, ns. ε-putkessa.



Tasaisesti suppeneva funktiojono suppenee tietysti pisteittäin, mutta käänteinen väite ei päde, kuten Esimerkissä 4.1.7 nähtiin.

Ongelma 4.2.2. Osoita, että joukossa A tasaisesti suppeneva funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, suppenee myös pisteittäin joukossa A.

Näytä lisäksi, että funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, ei suppene tasaisesti joukossa $[0,1]$, vaikka se suppeneekin pisteittäin joukossa $[0,1]$.

Tasainen suppeneminen voidaan muotoilla funktioiden välisen etäisyyden käsitteen avulla.

Määritelmä 4.2.3. Olkoot $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ funktioita. Tällöin luku

$$\|f - g\|_A = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$$

on funktioiden f ja g välinen **etäisyys**.

Lause 4.2.4. *Olkoot $f_n, f\colon A \to \mathbb{R}$ funktioita. Tällöin $f_n \to f$ tasaisesti joukossa A, jos ja vain jos*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0\,.$$

Toisin sanoen, $f_n \to f$ tasaisesti joukossa A, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \textit{kaikilla } n \geq N_\varepsilon\,.$$

Todistus. “ $\Rightarrow$ ” Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $f_n \to f$ tasaisesti joukossa A, niin on $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{kaikilla } x \in A\,, \quad \text{kun } n \geq N_\varepsilon.$$

Näin ollen

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

“ $\Leftarrow$ ” Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska on olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{kun } n \geq N_\varepsilon,$$

niin

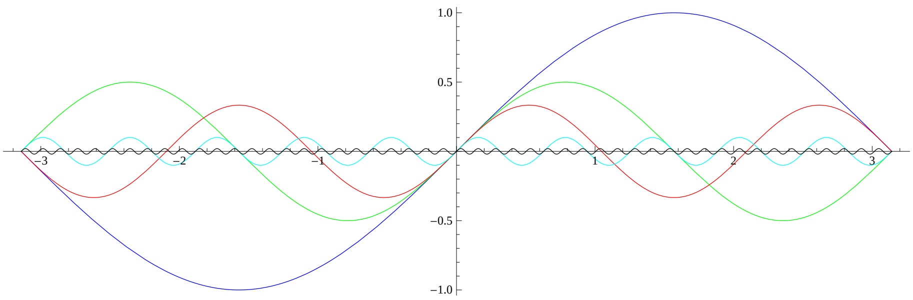
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{kaikilla } x \in A, \quad \text{kun } n \geq N_\varepsilon.$$

Siis $f_n \to f$ tasaisesti joukossa A. □

. . . .

Esimerkki 4.2.5. (a) Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$



Tällöin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono jatkuvia funktioita, joille $f_n \to 0$ tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Tällöin **kaikille** $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\sin(nx)|}{n} < \frac{1}{n},$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti siis kaikille $n \geq N_\varepsilon$

$$\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

Näin ollen $f_n \to 0$ tasaisesti koko reaaliakselilla.

(b) Esimerkin 4.1.7 kohdassa (c) funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppeneminen vakiofunktioon 0 ei ole tasaista:

$$\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \geq \left|f_n\left(2n + \tfrac{1}{2}\right)\right| = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1,$$

joten $\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} \not\to 0$ kun $n \to \infty$.

(c) Esimerkin 4.1.7 kohdassa (b) funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppeneminen vakiofunktioon 0 ei ole tasaista samoin perustein kuin edellisessä kohdassa, sillä

$$\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \geq f_n\left(\tfrac{1}{2n}\right) = n.$$

. . . .

Ongelma 4.2.6. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{4n}.$$

Tutki funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasaista suppenemista joukossa $[0,1]$. Entä suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin tai tasaisesti koko joukossa $\mathbb{R}$?

. . . .

Huomautus 4.2.7. Tasaisen suppenemisen testaamisessa pitää löytää

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\right)$$

eli järjestyksessä "ensin sup, sitten lim". Riippuen tilanteesta, voi käyttää esimerkiksi seuraavia keinoja

(i) Supremum voi löytyä suoraan tai sen voi hakea ääriarvotehtävänä, jolloin pitää tarkastaa derivaatan nollakohdat ja määrittelyvälin päätepisteet.

(ii) Tarkkaa arvoa ei aina tarvita, vaan usein sopiva epäyhtälö riittää:

$$\text{jos } \sup |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \text{ ja } c_n \to 0, \text{ kun } n \to \infty, \text{ niin } \lim_{n\to\infty} (\sup |f_n(x) - f(x)|) = 0$$

ja vastaavasti

$$\text{jos } \sup |f_n(x) - f(x)| \geq d_n \text{ ja } d_n \not\to 0, \text{ kun } n \to \infty, \text{ niin } \lim_{n\to\infty} (\sup |f_n(x) - f(x)|) \neq 0.$$

. . . .

Esimerkki 4.2.8. Tutki, suppeneeko funktiojono $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ tasaisesti.

Ratkaisu. Jokaiselle $x \in [0,1]$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) = \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0,$$

joten $f_n \to 0$ pisteittäin välillä $[0,1]$.

Tarkastellaan erotuksen $|f_n(x) - 0|$ suurinta arvoa välillä $[0,1]$ derivaatan avulla.

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1-2x^n) = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}.$$

Näin ollen

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geq |f_n(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}})| = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.$$

Niinpä $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \not\to 0$, kun $n \to \infty$, eli suppeneminen ei ole tasaista.

. . . .

Seuraava Cauchyn ehto kertoo, milloin funktiojono suppenee tasaisesti. Ehdon hyödyllisyys on siinä, että rajafunktiota ei tarvitse tuntea.

Lause 4.2.9. (Tasainen Cauchyn kriteerio) *Olkoot $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funktioita, $n \in \mathbb{N}$. Funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti joukossa A (kohti jotain funktiota $f\colon A \to \mathbb{R}$), jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \textit{kaikilla } x \in A, \quad \textit{kun } n,m \geq N_\varepsilon.$$

Todistus. “$\Rightarrow$” Se, että tasaisesta suppenemisesta seuraa tasainen Cauchyn ehto on Harjoitustehtävä **13.**

“$\Leftarrow$” Jos jono toteuttaa tasaisen Cauchyn ehdon, niin jokaisella $x \in A$ lukujono $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono ja siksi se suppenee kohti reaalilukua $f(x)$. Näin saadaan rajafunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$, johon jono (f_n) suppenee pisteittäin. Osoitetaan, että suppeneminen on myös tasaista:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tasainen Cauchyn ehto antaa luvun $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } x \in A, \quad \text{kun } n,m \geq N_\varepsilon.$$

Kun $x \in A$, niin $f_n(x) \to f(x)$, joten voidaan valita sellainen luku $m_x \in \mathbb{N}$, että $m_x > N_\varepsilon$ ja

$$|f(x) - f_{m_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Näin ollen, kun $n \geq N_\varepsilon$, niin

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Erityisesti

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ kaikilla } x \in A, \quad \text{kun } n \geq N_\varepsilon.$$

Näin ollen jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti joukossa A (kohti funktiota f). $\square$

Harjoitustehtäviä

1. Selvitä, suppeneeko seuraava funktiojono pisteittäin? Entä tasaisesti? Määrää myös rajafunktio, jos mahdollista.

$$h_n \colon [\tfrac{1}{2}, 1[\to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ h_n(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

2. Olkoot $f_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = |\sin x|^n.$$

Määritä perustellen funktio $f \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikille } x \in [0, 2\pi].$$

3. Olkoot $f_n \colon\ ]0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$.

(a) Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin välillä $]0, 1]$? Entä tasaisesti?

(b) Entä suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin tai tasaisesti välillä $[1/2, 1]$?

Piirrä kuva.

4. Olkoot $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Tutki funktiojonon (f_n) pisteittäistä ja tasaista suppenemista. Mikä on rajafunktio?

5. Olkoon $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}.$$

Tutki funktiojonon (f_n) pisteittäistä ja tasaista suppenemista. Mikä on rajafunktio?

6. Olkoon $f_n \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Tutki funktiojonon (f_n) pisteittäistä ja tasaista suppenemista. Mikä on rajafunktio?

7. Olkoon $f_n \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = xe^{-nx}.$$

Tutki funktiojonon (f_n) pisteittäistä ja tasaista suppenemista. Mikä on rajafunktio?

8. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \arctan(nx).$$

Tutki funktiojonon (f_n) pisteittäistä ja tasaista suppenemista. Mikä on rajafunktio?

9. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}.$$

Tutki funktiojonon (f_n) pisteittäistä ja tasaista suppenemista. Mikä on rajafunktio?

10. Selvitä, suppenevatko seuraavat funktiojonot pisteittäin? Entä tasaisesti? Mikä on jonon raja-funktio?

(a) $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, kun $x \geq 0$

(b) $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, kun $x \geq a$, missä $a > 0$

11. Olkoon $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

(a) Näytä, että funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin välillä $[0, 1]$.

(b) Onko

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx\ ?$$

12. Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \min\{|x - k| : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Määritellään sitten $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$f_n(x) = 2^{-n}g(2^nx).$$

Selvitä, suppeneeko funktiojono (f_n) pisteittäin? Entä tasaisesti? Mikä on jonon raja-funktio? Hahmottele kuvaajia!

13. Osoita, että jos $f_n \to f$ tasaisesti reaalilukujen joukossa niin funktiojono (f_n) toteuttaa tasaisen Cauchyn ehdon reaalilukujen joukossa.

14. Näytä, että tasaisessa suppenemissa käytetty funktioiden välinen etäisyys on **metriikka** osoittamalla, että seuraavaa pätee:

Olkoot $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funktioita ja olkoon

$$\|f - g\|_A = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$

Osoita, että kaikilla $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ pätee

(a) $\|f-g\|_A \geq 0$,

(b) $\|f-g\|_A = 0$, jos vain jos $f = g$,

(c) $\|f-g\|_A = \|g-f\|_A$

(d) $\|f-g\|_A \leq \|f-h\|_A + \|h-g\|_A$.

15. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{n}}.$$

Suppeneeko funktiojono (f_n) pisteittäin tai tasaisesti? Piirrä kuva esimerkiksi, kun $f(x) = \sin x$.

16. Anna esimerkki funktiojonosta $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, joka ei suppene pisteittäin missään joukossa A, mutta itseisarvojen jono $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti koko joukossa $\mathbb{R}$.

17. Keksi esimerkki funktiojonosta $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle pätee

(i) f_n on epäjatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

(ii) jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa rajafunktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

18. Oletetaan, että funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota f välillä $[a,b]$. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa?

(a) Jos f_n on kasvava jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin funktio f on myös kasvava.

(b) Jos jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on $f_n(x) > 0$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin myös $f(x) > 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.

19. Oletetaan, että funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota f välillä $[a,b]$. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa?

(a) Jos f_n on vakiofunktio jokaisella n, niin funktio f on myös vakiofunktio.

(b) Jos f_n on epäjatkuva kaikilla $x \in [a,b]$, niin myös f on epäjatkuva kaikilla $x \in [a,b]$.

20. Anna esimerkki jonosta rajoitettuja funktioita $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että niiden pisteittäinen rajafunktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ei ole rajoitettu. Säilyykö rajoittuneisuus tasaisessa suppenemisessa?

21. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva. Määritellään $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_j(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{j}\right) - f(x)}{\frac{1}{j}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Näytä, että funktiojono (f_j) suppenee tasaisesti kohti derivaattaa $f'(x)$ jokaisella rajoitetulla välillä $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

22. Osoita, että sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{2^j}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Merkitään $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(jx)}{2^j}.$$

Näytä Tasaisen Cauchy kriteerion nojalla, että funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{2^j}.$$

23. Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono reaalilukuja, joiden määräämä sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti. Olkoot lisäksi $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sin(jx).$$

Osoita, että $f_n \to f$ tasaisesti, missä

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(jx).$$

Viikko 5

Funktiojonojen ja funktiosarjojen ominaisuuksia

Tässä luvussa tarkastellaan funktiojonon tasaista suppenemista ja sitä, miten tasaisessa suppenemisessa funktiojonon funktioiden ominaisuudet periytyvät rajafunktiolle. Näitä tarkasteluja varten on hyvä palauttaa mieleen muutamia kurssilta JMA3 tuttuja määritelmiä ja tuloksia.

- **Riemann-integraali:** Välin $[a, b]$ **jaon** P muodostavat luvut (äärellisen monta)

  $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

  Jakoa merkitään $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

  Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Funktion f jakoon P liittyvä **alasumma** on luku

  $$L(f, P) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1})$$

  ja **yläsumma** luku

  $$U(f, P) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}).$$

  Funktion f **alaintegraali** yli välin $[a, b]$ on luku

  $$\text{ala} \int_a^b f = \sup \{L(f, P) \ : \ P \text{ on välin } [a, b] \text{ jako } \}$$

  ja **yläintegraali** yli välin $[a, b]$

  $$\text{ylä} \int_a^b f = \inf \{U(f, P) \ : \ P \text{ on välin } [a, b] \text{ jako } \}.$$

  Rajoitettu funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on **(Riemann-)integroituva**,jos

  $$\text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f\,.$$

  Tällöin funktion f **(Riemann-)integraali** yli välin $[a, b]$ on

  $$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := \text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f\,.$$

- **Riemannin ehto:** Rajoitettu funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa välin $[a,b]$ jako P_ε siten, että
$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$
- **Derivaatta:** Funktio $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ on **derivoituva** pisteessä $x_0 \in]a,b[$ (ja $f'(x_0)$ funktio f derivaatta pisteeessä x_0), jos raja-arvo
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$$
on olemassa äärellisenä.
- **Analyysin peruslause:** Olkoon $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja olkoon $x_0 \in]a,b[$. Tällöin
$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \text{ kaikilla } x \in]a,b[\,.$$
Kääntäen, jos g on jatkuva funktio välillä $[a,b]$ ja $x_0 \in [a,b]$, niin integraalifunktio
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\,,$$
on jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $G'(x) = g(x)$ kaikilla $x \in]a,b[$.

Funktiojonoista

5.1 Rajankäyntien järjestyksen vaihtaminen

Palautetaan mieliin funktiojonon pisteittäinen ja tasainen suppeneminen seuraavan Ongelman avulla

Ongelma 5.1.1. Olkoot $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2}$, funktioita, missä $n \in \mathbb{N}$. Tutki funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäistä ja tasaista suppenemista joukossa $\mathbb{R}$. Entä suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasaisesti joukossa $[1, \infty[$?

5.1.1 Jatkuvuuden säilyminen

Aiemmin on useaan kertaan nähty, että jatkuvista funktioista koostuvan funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rajafunktio ei välttämättä ole jatkuva. Seuraavaksi osoitetaan, että tasaisessa suppenemisessa jatkuvuus kuitenkin säilyy.

Lause 5.1.2. *Olkoot $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funktioita, jotka ovat jatkuvia pisteessä $x_0 \in A$. Jos $f_n \to f$ tasaisesti joukossa A, niin rajafunktio f on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, jolle

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Koska f_n on jatkuva pisteessä x_0, on olemassa $\delta > 0$, jolle pätee

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kaikilla $x \in A$, joilla $|x - x_0| < \delta$.

Näin ollen, kun $x \in A$ ja $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Funktio f on siis jatkuva pisteessä x_0. □

. . . .

Huomautus 5.1.3. (i) Lauseen 5.1.2 tulos ei tietenkään käänny: Jatkuvien funktioiden $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, rajafunktio voi olla jatkuva, vaikka suppeneminen ei ole tasaista. Tästä hyvänä esimerkkinä on Kolmioesimerkki 4.1.7 kohta (b).

(ii) Jos joukossa A jatkuvien funktioiden jonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäinen rajafunktio on epäjatkuva, niin Lauseen 5.1.2 nojalla voidaan päätellä suoraan, että suppeneminen ei voi olla tasaista. Tämä on monesti kätevä tapa todeta, että suppeneminen ei ole tasaista.

(iii) Muista, että jatkuvuus voidaan karakterisoida raja-arvon avulla: funktio $g\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in A$, jos

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Lause 5.1.2 oikeuttaa "rajankäyntien järjestyksen vaihtamiseen" seuraavasti: Olkoot $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ pisteessä $x_0 \in A$ jatkuvia funktioita, jotka suppenevat tasaisesti funktioon $f\colon A \to \mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{y\to x_0} f_n(y)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \lim_{y\to x_0} f(y) = \lim_{y\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(y)\right).$$

. . . .

Ongelma 5.1.4. (a) Täydennä Huomautuksen 5.1.3 kohdan (iii) yhtälöketjuun yhtäsuuruuksien kohdalle, mitä oletusta tai oletuksia niissä on käytetty.

(b) Osoita funktiojonoa (f_n), missä $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, ja sen rajafunktiota tutkimalla, että Huomautuksen 5.1.3 kohdan (iii) rajankäyntien järjestyksen vaihtaminen ei ole sallittua ilman oletusta tasaisesta suppenemisesta.

5.1.2 Riemann-integroituvuuden säilyminen

Myös Riemann-integroituvuus säilyy tasaisessa suppenemisessa ja lisäksi rajankäynnin ja integraalin suorittamisjärjestyksen voi vaihtaa.

Lause 5.1.5. *Olkoon $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Olkoot $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Riemann-integroituvia funktioita. Jos $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[a,b]$, niin rajafunktio f on Riemann-integroituva ja*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Todistus. Käytetään Riemannin ehtoa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tasaisen suppenemisen perusteella voidaan valita sellainen $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,, \tag{$*$}$$

kun $n \geq N_\varepsilon$. Olkoon tästä eteenpäin $n \geq N_\varepsilon$ kiinteä. Riemannin ehdon nojalla löytyy välin $[a,b]$ jako $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ siten, että

$$U(f_n,P) - L(f_n,P) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Toisaalta raja-funktion f ala- ja yläsummille jaolla P saadaan epäyhtälön $(*)$ nojalla arviot

$$U(f,P) = \sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1})$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{j=1}^{m} \left(\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x)(x_j - x_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{3} = U(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{j=1}^{m} \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) \\
&\ge \sum_{j=1}^{m} \left(\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f_n(x)(x_j - x_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{3} = L(f_n, P) - \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
U(f, P) - L(f, P) &\le \left(U(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{3} \right) - \left(L(f_n, P) - \frac{\varepsilon}{3} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

joten f on Riemann-integroituva.

Todistetaan seuraavaksi integroinnin ja rajankäynnin vaihto. Integraalin kolmioepäyhtälön nojalla on

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&\le \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kun $n \ge N_\varepsilon$. Niinpä

$$
\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.
$$

□

. . . .

Esimerkki 5.1.6. (a) Tarkastellaan Kolmioesimerkin (Esimerkki 4.1.7 kohta (b)) funktiojonoa $(f_n)_n$, $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$
f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & \text{kun } 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ 2n - 2n^2x, & \text{kun } \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{kun } \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}
$$

Esimerkissä todettiin, että $f_n \to 0$ pisteittäin välillä $[0,1]$, ja lisäksi

$$
\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \ne \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.
$$

Tässä tapauksessa siis rajafunktio on kyllä integroituva, mutta rajafunktion integraali ei ole integraalien raja-arvo. Lauseen 5.1.5 nojalla voidaan jälleen todeta, että suppeneminen $f_n \to f$ ei voi olla tasaista.

(b) Voi käydä niinkin, että rajafunktio ei ole edes integroituva:

Olkoon $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$ ja olkoot $f_n \colon [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Funktio f_n on rajoitettu, sillä $|f_n(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in [0,1]$, ja jatkuva joukossa $[0,1] \setminus \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska epäjatkuvuuspisteiden joukko $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ on äärellinen, niin f_n on integroituva yli välin $[0,1]$.

Funktiot f_n suppenevat pisteittäin kohti rajafunktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

joka ei ole integroituva välillä $[0,1]$, sillä

$$\text{ala} \int_0^1 f = 0 \quad \text{ja} \quad \text{ylä} \int_0^1 f = 1.$$

Niinpä pisteittäinen suppeneminen ei riitä takaamaan edes rajafunktion integroituvuutta.

(c) Lauseen 5.1.5 yhtälö ei päde epäoleellisille integraaleille, eli oletus rajoitetusta välistä $[a,b]$ on oleellinen. Esimerkin keksiminen on Harjoitustehtävänä **4.**

5.1.3 Derivoituvuuden säilyminen

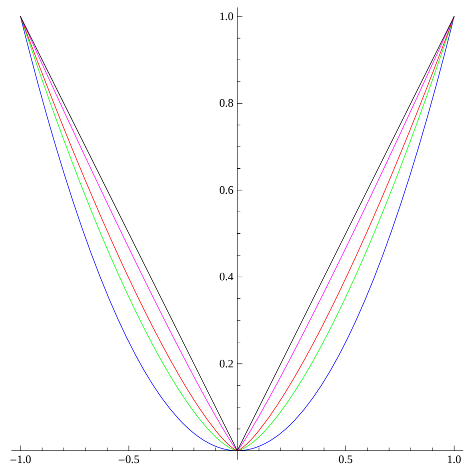
Edellä todettiin jatkuvuuden ja integroituvuuden säilyvän tasaisessa suppenemisessa. Entä miten käy derivoituvuuden? Esimerkin 4.1.7 kohdan (a) funktiojonon funktiot ovat (jopa äärettömän monta kertaa) derivoituvia, mutta rajafunktio on epäjatkuva ja siten se ei ole derivoituva. Esimerkissä suppeneminen on vain pisteittäistä, ei tasaista. Seuraavat esimerkit näyttävät, että derivoituvuus **ei** säily edes tasaisessa suppenemisessa.

. . . .

Esimerkki 5.1.7. (a) Olkoot $f_n, f \colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}, \quad f(x) = |x|.$$

Tällöin f_n on jatkuvasti derivoituva kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $f_n \to f$ tasaisesti.



RATKAISU. Funktioiden f_n näyttäminen jatkuvasti derivoituvaksi jätetään harjoitustehtäväksi. Näytetään Lauseen 4.2.4 avulla, että suppeneminen on tasaista. Olkoon

$$g(x) = f(x) - f_n(x) = x - x^{1+\frac{1}{n}}, \quad x \in \,]0,1[.$$

Nyt g on derivoituva kaikilla $x \in \,]0,1[$ ja

$$g'(x) = 1 - \frac{n+1}{n} x^{\frac{1}{n}} = 0 \iff x = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Koska $g'(x) > 0$, kun $0 < x < (\frac{n}{n+1})^n$ ja $g'(x) < 0$, kun $(\frac{n}{n+1})^n < x < 1$, niin funktiolla g on maksimi pisteessä $(\frac{n}{n+1})^n$ eli

$$g(x) \le g\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

kaikilla $x \in \,]0,1[$.

Vastaavasti kun $x \in \,]-1,0[$, niin funktion

$$g(x) = f(x) - f_n(x) = (-x) - (-x)^{1+\frac{1}{n}}$$

maksimi saavutetaan pisteessä $-(\frac{n}{n+1})^n$ ja

$$g(x) \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

kaikilla $x \in \,]-1,0[$. Lisäksi $f_n(0) = f(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Niinpä

$$\sup_{x \in]-1,1[} |f_n(x) - f(x)| \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \cdot \frac{1}{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$ (muista, että $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$).

Siten Lauseen 4.2.4 mukaan $f_n \to f$ tasaisesti välillä $]-1,1[$. Rajafunktio f ei kuitenkaan ole derivoituva pisteessä $x = 0$, vaikka kaikki funktiot f_n ovat jopa jatkuvasti derivoituvia ja suppeneminen on tasaista.

(b) (**Derivoituva funktiojono ja rajafunktio, derivaattojen jono ei suppene**) Esimerkissä 4.2.5 kohdassa (a) tutustuttiin jo funktioihin $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Esimerkissä näytettiin, että $f_n \to 0$ tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$. Lisäksi funktiot f_n ja $f = 0$ ovat (jatkuvasti) derivoituvia kaikkialla.

Tarkastellaan derivaattafunktioiden $f_n' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

muodostamaa jonoa. Koska $\cos(n\pi) = -1$, kun n on pariton, ja $\cos(n\pi) = 1$, kun n on parillinen, niin (reaaliluku)jono $(f_n'(\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ ei suppene. Huomaa myös, että $f_n'(0) = \cos 0 = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja siten

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \ne 0 = f'(0).$$

. . . .

Jotta rajafunktiokin olisi derivoituva ja derivaattojen rajafunktio olisi rajafunktion derivaatta, niin tarvitaan vahvempia oletuksia: vaaditaan jatkuvan derivoituvuuden lisäksi derivaattojen jonon tasainen suppeneminen.

Lause 5.1.8. *Olkoot $f_n\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jatkuvasti derivoituvia funktioita. Jos $f_n \to f$ tasaisesti välillä $]a,b[$ ja jos derivaattojen jono (f_n') suppenee tasaisesti välillä $]a,b[$ kohti funktiota g, niin f on (jatkuvasti) derivoituva ja $f' = g$.*

Todistus. Koska funktiot f_n' ovat jatkuvia ja $f_n' \to g$ tasaisesti, niin g on jatkuva Lauseen 5.1.2 nojalla. Riittää siis osoittaa, että f on derivoituva ja $f' = g$.

Olkoon $x_0 \in]a,b[$ (mikä tahansa) kiinteä piste. Analyysin peruslauseen mukaan

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt,$$

joten Lauseen 5.1.5 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \Big) \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt. \end{aligned}$$

Siis analyysin peruslauseen nojalla f on jatkuvasti derivoituva funktio, jonka derivaattafunktio on g. □

. . . .

Ongelma 5.1.9. Näytä, että Esimerkin 5.1.7 funktiojonot eivät toteuta Lauseen 5.1.8 oletuksia.

Funktiosarjoista

5.2 Funktiosarjan määritelmä

Luvuissa 2 ja 3 tarkasteltiin lukujonojen erikoistapauksia – lukusarjoja. Ei varmaan tule yllätyksenä, että funktiojonojen erikoistapauksena saadaan funktiosarja. Tarkastellaan näitä seuraavaksi lähemmin.

....

Määritelmä 5.2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ joukko. Olkoot $f_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funktioita. Muodollista summaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots$$

kutsutaan **funktiosarjaksi**. Sanotaan, että funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$

(i) **suppenee (pisteittäin) joukossa A**, jos (luku)sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ suppenee jokaisella $x \in A$, eli jos osasummien

$$S_k \colon A \to \mathbb{R}, \quad S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\,,$$

muodostama funktiojono suppenee pisteittäin joukossa A.

(ii) **suppenee itseisesti joukossa** A, jos itseisarvofunktioiden sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ suppenee (pisteittäin) joukossa A, eli (luku)sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ suppenee jokaisella $x \in A$.

(iii) **suppenee tasaisesti joukossa** A, jos osasummien

$$S_k \colon A \to \mathbb{R}, \quad S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\,,$$

muodostama funktiojono suppenee tasaisesti joukossa A, ts. on olemassa funktio $f \colon A \to \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$|S_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in A\,, \text{ kun } k \geq N_\varepsilon\,.$$

....

Huomautus 5.2.2. (a) Suppeneva funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ määrää siis funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$, jonka arvo pisteessä x on lukusarjan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ summa,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,.$$

Funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee (pisteittäin tai tasaisesti), jos ja vain jos osasummien

$$S_k\colon A \to \mathbb{R}, \quad S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\,,$$

funktiojono (S_k) suppenee (pisteittäin tai tasaisesti) kohti funktiota f. Kurssilla aikaisemmin käsitellyt tulokset koskien funktiojonojen suppenemista ja lukusarjojen suppenemista ovat siis käytettävissä.

(b) Tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerio 4.2.9 tulkittuna funktiosarjoille kertoo, että funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti (kohti jotain funktiota $f\colon A \to \mathbb{R}$), jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$\sup_{x\in A}\left|\sum_{n=m+1}^{k} f_n(x)\right| = \sup_{x\in A}|S_k(x) - S_m(x)| < \varepsilon\,, \qquad \text{kun } k > m \geq N_\varepsilon\,.$$

(c) Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee (pisteittäin tai tasaisesti) joukossa A, niin funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee (pisteittäin tai tasaisesti) kohti nollafunktiota, koska

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k \to f - f = 0 \quad \text{(pisteittäin, tasaisesti), kun } n \to \infty.$$

(vrt. Lause 2.2.5)

. . . .

Esimerkki 5.2.3. (a) Olkoot $g_j\colon\,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$, $g_j(x) = x^j$, $j = 0,1,2,\ldots$. Sarja $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ on geometrinen sarja, joka suppenee pisteittäin, sillä $|x| < 1$. Lisäksi

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}.$$

Kuitenkin

$$g_j\left(\sqrt[j]{1-\tfrac{1}{j}}\right) = 1 - \frac{1}{j} \quad \text{kaikilla } j \in \mathbb{N}$$

ja tällöin

$$\|g_j - 0\|_{]-1,1[} = \sup_{x\in]-1,1[} |g_j(x) - 0| \geq 1 - \frac{1}{j} \not\to 0, \quad \text{kun } j \to \ \infty,$$

ja siten jono $(g_j)_j$ ei suppene tasaisesti nollafunktioon. Funktiosarjan $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ suppeneminen ei siis ole tasaista.

(b) Olkoon $f_j\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$,

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in]\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}], \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Nyt

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in]\frac{1}{n+1}, 1], \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

ja siten $S_n(x) \to 1$ (vakiofunktio) pisteittäin välillä $]0,1]$. Toisaalta kuitenkin

$$\|S_n - 1\|_{]0,1]} \geq |\underbrace{S_n(\tfrac{1}{n+2})}_{=0} - 1| = 1 \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

joten funktiosarjan $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j$ suppeneminen ei ole tasaista.

. . . .

5.3 Funktiosarjan tasainen suppeneminen

Seuraava ns. **Weierstrassin M-testi** on tärkeä työkalu funktiosarjojen tasaisen suppenemisen tutkimisessa.

Lause 5.3.1 (Weierstrassin M-testi). *Olkoot $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ jono funktioita, joille kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on sellainen $0 \leq M_n < \infty$, että*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \text{kaikilla } x \in A\,.$$

Jos (luku)sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa A.

Todistus. Itseinen suppeneminen seuraa Majoranttiperiaatteesta (Lause 2.3.2) seuraavasti: Olkoon $x \in A$. Merkitään $a_n = f_n(x)$. Koska sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee ja $|a_n| \leq M_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee Lauseen 2.3.2 nojalla. Siispä sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti.

Näytetään sitten, että $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\,.$$

Nyt kun $k > m$, niin kaikilla $x \in A$ on

$$|S_k(x) - S_m(x)| = \Big|\sum_{n=m+1}^{k} f_n(x)\Big| \leq \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^{k} M_n.$$

Koska sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin osasummien jono $\left(\sum\limits_{n=1}^{i} M_n\right)_{i\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono. On siis olemassa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $\sum\limits_{n=m+1}^{k} M_n < \varepsilon$, kun $k > m \geq N_\varepsilon$.

Näin ollen

$$|S_k(x) - S_m(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in A, \text{ kunhan } k > m \geq N_\varepsilon.$$

Funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ siis toteuttaa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerion ja suppenee siten tasaisesti joukossa A. □

. . . .

Esimerkki 5.3.2. (a) Suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^7}$$

tasaisesti välillä $[-1, 1]$?

Ratkaisu. Koska

$$\frac{|x^j|}{j^7} \leq \frac{1}{j^7} \quad \text{kaikilla } x \in [-1, 1] \text{ ja kaikilla } j \in \mathbb{N}$$

ja sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^7}$ suppenee yliharmonisena sarjana, niin funktiosarjan $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^7}$ tasainen suppeneminen seuraa Weierstrassin M-testistä.

(b) Suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{j(1 + j^2x^2)}$$

tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$?

Ratkaisu. Weierstrassin M-testissä käytettävää majoranttisarjaa ei löydy suoraan. Summattavat funktiot f_j ovat kuitenkin koko joukossa $\mathbb{R}$ derivoituvia, joten etsitään derivaatan avulla funktioiden suurin ja pienin arvo. Nyt kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $j \in \mathbb{N}$ on

$$f_j'(x) = \frac{j(1 + j^2x^2) - 2x^2j^3}{j^2(1 + j^2x^2)^2}.$$

Funktion f_j derivaatan nollakohdat ovat $\frac{1}{j}$ ja $-\frac{1}{j}$ ja näissä derivaatan nollakohdissa on $f_j(\pm\frac{1}{j}) = \pm\frac{1}{2j^2}$. Derivaatan merkkiä tutkimalla havaitaan, että funktiolla f_j on lokaali minimi pisteessä $-\frac{1}{j}$ ja lokaali maksimi pisteessä $\frac{1}{j}$. Lisäksi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_j(x) = 0$, joten

$$|f_j(x)| \leq \frac{1}{2j^2} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana, joten tutkittava sarja suppenee tasaisesti Weierstrassin M-testin nojalla.

. . . .

Ongelma 5.3.3. Olkoon $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva sarja. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee itseisesti ja tasaisesti reaalilukujen joukossa.

. . . .

Funktiosarjan $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ tasainen suppeneminen tarkoittaa osasummien muodostaman funktiojonon $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasaista suppenemista. Funktioiden f_j jatkuvuudesta, integroituvuudesta tai derivoituvuudesta seuraa osasummalle S_n vastaava ominaisuus. Seuraava lause onkin suora seuraus funktiojonoille todistetuista tuloksista.

. . . .

Lause 5.3.4. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Olkoot $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funktioita, joille funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti välillä I kohti funktiota $f\colon I \to \mathbb{R}$.*

(a) Jos funktiot f_n ovat jatkuvia, niin funktio f on jatkuva.

(b) Jos funktiot f_n ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,b] \subset I$, niin funktio f on Riemann-integroituva ja

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

(c) Jos funktiot f_n ovat jatkuvasti derivoituvia ja jos myös derivaattafunktioiden sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ suppenee tasaisesti (avoimella) välillä I, niin funktio f on jatkuvasti derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in I\,.$$

. . . .

Ongelma 5.3.5. Todista Lauseen 5.3.4 kohta (a) käyttäen Lausetta 5.1.2. (Kohdat (b) ja (c) ovat harjoitustehtäviä)

. . . .

Esimerkki 5.3.6. Kuten JMA3-kurssilla nähtiin, on olemassa **jatkuvia** funktioita, jotka **eivät** ole derivoituvia **yhdessäkään** pisteessä. Eräs esimerkki tällaisesta on niin sanottu **Blancmangen funktio** $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritellään ensin etäisyysfunktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \min\{|x-k| \;:\; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tällöin Blancmangen funktio $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saadaan summana

$$B(x) = f(x) + \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{4}f(4x) + \frac{1}{8}f(8x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

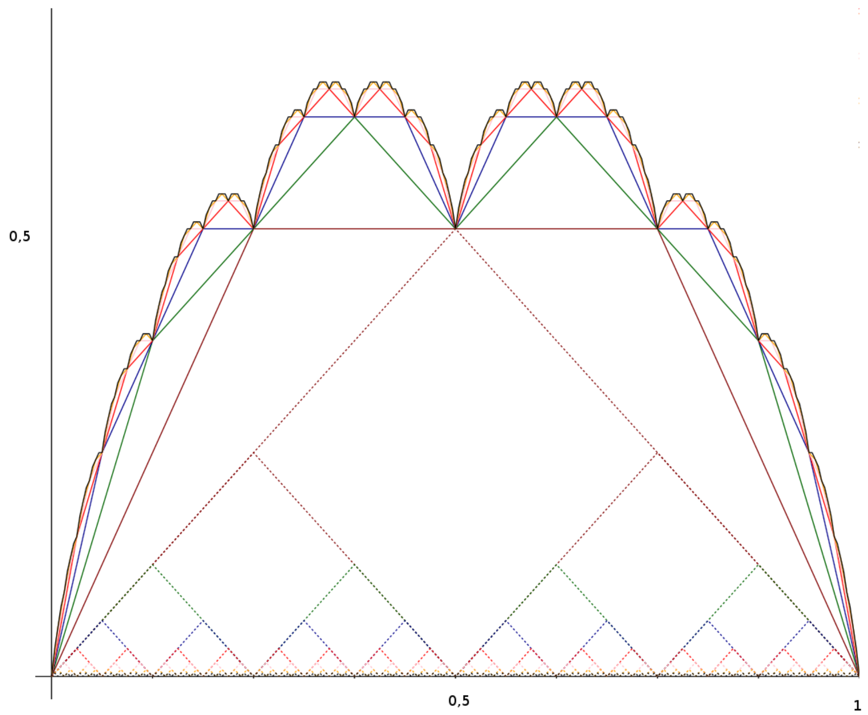
Koska

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n} f(2^n x)\right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

ja (luku)sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ suppenee geometrisena sarjana, niin funktiosarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti Weierstrassin M-testin nojalla. Kaikki funktiot f_n ovat jatkuvia, joten summafunktio B on jatkuva Lauseen 5.3.4 perusteella. Kuitenkin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ voidaan sopivasti valitun jonon $(h_n)_n$, jolle $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, avulla näyttää, että erotusosamäärällä

$$\frac{B(x+h_n) - B(x)}{h_n}$$

ei ole raja-arvoa. Funktio B ei siis ole derivoituva missään pisteessä $x \in \mathbb{R}$.



Kuva 5.1: Jatkuva funktio, joka ei ole derivoituva yhdessäkään pisteessä.

Harjoitustehtäviä

1. Olkoot $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin? Entä tasaisesti? Piirrä kuva.

2. Olkoot $g_n \colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = (\cos x)^n.$$

Suppeneeko funktiojono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin? Entä tasaisesti joukossa $[0,\pi]$? Suppeneeko funktiojono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasaisesti joukossa $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$?

3. Näytä integraalien avulla, että funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2},$$

ei voi supeta tasaisesti.

4. Anna esimerkki funktioista $f_n \colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ ja $f \colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, joille $f_n \to f$ tasaisesti joukossa $[1,\infty[$, epäoleelliset integraalit $\int_1^\infty f_n(x)\,dx$ (kaikille $n \in \mathbb{N}$) ja $\int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenevat, mutta

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,dx \neq \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

5. Olkoot $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita siten, että $f_n \to f$ tasaisesti. Näytä, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Onko väite totta ilman oletusta tasaisesta suppenemisesta?

6. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin nx}{nx}\,dx = 0.$$

7. Olkoon $f_n \colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että funktio f_n on jatkuvasti derivoituva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

8. Oletetaan, että funktiot $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja että funktiojono $(f_n)_n$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f.

(a) Osoita, että funktiojono $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee myös tasaisesti, missä $F_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

(b) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\int_a^x f_n(t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,dt \right).$$

9. Olkoot $f_n \colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Osoita, että funktiojono $(f_n)_n$ on jatkuvasti derivoituva ja että se suppenee tasaisesti. Onko rajafunktio $f \colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ derivoituva? Miksi tämä ei ole ristiriidassa Lauseen 5.1.8 kanssa?

10. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu funktio. Olkoon $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{f(nx)}{\sqrt{n}}, \; n \in \mathbb{N}$$

Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0 \quad \text{jokaisella välillä } [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

11. Anna esimerkki derivoituvista funktioista koostuvasta funktiojonosta $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $f_n\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, joka suppenee tasaisesti, mutta lukujono $(f_n'(0))_{n\in\mathbb{N}}$ on rajoittamaton.

12. Oletetaan, että funktiot $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat jatkuvasti derivoituvia siten, että derivaattojen jono $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti ja lukujono $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee. Osoita, että funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin.

13. Olkoot $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = \dfrac{x}{\sqrt{j}+3}$, $j \in \mathbb{N}$, funktioita.

(a) Suppeneeko funktiojono $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin, missä $S_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,?$$

(b) Entä suppeneeko funktiojono $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin, missä $T_n\colon]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$,

$$T_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f_j(x)\,?$$

Suppeneeko se itseisesti?

14. Selvitä, suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{3}\right)^j$$

pisteittäin joukossa $\mathbb{R}$. Laske myös rajafunktio, jos mahdollista. Entä suppeneeko funktiosarja itseisesti joukossa $\mathbb{R}$?

15. Selvitä, suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin, missä $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(x^2+1)^k}.$$

Mikä on jonon rajafunktio? Voiko suppeneminen olla tasaista?

(Vihje: geometrinen sarja?)

16. Anna esimerkki funktiosarjasta $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j$, jolle $f_j \to 0$ tasaisesti joukossa $[-1,1]$, mutta funktiosarja ei suppene edes pisteittäin joukossa $[-1,1]$.

17. Olkoot $f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_j(x) = (\sin x)^j (\cos x)^j, \text{ kun } j \in \mathbb{N}, \quad \text{ja} \quad f_0(x) = 1.$$

Tutki funktiosarjan

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$$

pisteittäistä, itseistä ja tasaista suppenemista reaalilukujen joukossa. Minkä funktion funktiosarja määrää?

(Vihje: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$)

18. Olkoon $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^3 + 2x^2}$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

pisteittäin? Entä tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$?

19. Olkoon $g_n \colon]-\infty, -1[\to \mathbb{R}$, $g_n(x) = 2^{nx}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

pisteittäin? Entä tasaisesti välillä $]-\infty, -1[$?

20. Olkoon $f_j \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_j(x) = e^{-jx}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$$

pisteittäin? Entä tasaisesti joukossa $]0, \infty[$?

21. Olkoon $a > 0$. Olkoon $f_n \colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^4 x^2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

pisteittäin? Entä tasaisesti joukossa $[a, \infty[$?

22. Olkoot $g_n\colon]-\infty,-1[\to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{nx}$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiosarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

pisteittäin? Entä tasaisesti välillä $]-\infty,-1[$?

23. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[a,b]$, missä $a,b \in \mathbb{R},\ a < b$, mutta ei suppene tasaisesti koko joukossa $\mathbb{R}$. Suppeneeko funktiosarja pisteittäin koko joukossa $\mathbb{R}$? Esitä integraali

$$\int_{-a}^{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\, dx$$

sarjana.

24. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}.$$

Onko f hyvin määritelty koko joukossa $\mathbb{R}$? Onko f' esitettävissä sarjana?

25. Olkoon $a > 0$. Olkoot $f_n\colon [a,\infty[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{n}x}{7 + (nx)^2}.$$

Tutki, suppeneeko funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pisteittäin? Entä tasaisesti joukossa $[a,\infty[$?

26. Olkoot $f_j\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}$,

$$f_j(x) = (1-x)x^j.$$

Minkä funktion funktiosarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j$ määrää? Suppeneeko funktiosarja tasaisesti?

Viikko 6

Potenssisarjat

6.1 Potenssisarja ja sen suppeneminen

Potenssisarjat ovat erikoistapauksia funktiosarjoista. Niitä voidaan pitää polynomien yleistyksenä, “astetta ∞ olevina polynomeina”.

Määritelmä 6.1.1. Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Muotoa

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan **potenssisarjaksi**. Luvut a_j ovat potenssisarjan **kertoimet** ja piste x_0 sen **keskus**.

Jos potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenee (pisteittäin) joukossa A, se määrää funktion

$$f\colon A \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j.$$

Potenssisarjaa sanotaan funktion f **potenssisarjaesitykseksi**.

. . . .

Huomaa, että potenssisarjaa määriteltäessä tehdään sopimus $0^0 = 1$. Potenssisarja suppenee ainakin kun $x = x_0$, jolloin sen summa on a_0.

. . . .

Esimerkki 6.1.2. (a) Geometrinen sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

on yksinkertaisin potenssisarja kertoiminaan $a_j = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja keskuksenaan $x_0 = 0$. Kuten aiemmin on jo todettu, tämä sarja suppenee (pisteittäin), jos ja vain jos $|x| < 1$.

(b) Funktiosarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^j x^j = x + 4x^2 + 27x^3 + \dots$$

on potenssisarja kertoiminaan $a_0 = 0$ ja $a_j = j^j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ sekä keskuksenaan $x_0 = 0$. Tämä potenssisarja suppenee vain keskuksessaan $x_0 = 0$, sillä kun $x \neq 0$, niin $j^j x^j = (jx)^j \not\to 0$, kun $j \to \infty$.

(c) Millä $x \in \mathbb{R}$ potenssisarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{j}$$

suppenee?

Ratkaisu. Tässä siis $a_0 = 0$, $a_j = \frac{1}{j}$, kun $j \in \mathbb{N}$, ja $x_0 = 1$. Koska

$$\sqrt[j]{\frac{|x-1|^j}{j}} = \frac{|x-1|}{\sqrt[j]{j}} \to |x-1|, \quad \text{kun } j \to \infty,$$

niin Juuritestin 3.1.9 nojalla potenssisarja suppenee itseisesti, kun $|x-1| < 1$ ja hajaantuu, kun $|x-1| > 1$.

On vielä selvitettävä mitä tapahtuu, kun $|x-1| = 1$. Kun $x - 1 = 1$ (eli $x = 2$), sarja hajaantuu harmonisena sarjana, ja kun $x - 1 = -1$ (eli $x = 0$), se suppenee vuorottelevana harmonisena sarjana.

Potenssisarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{j}$ siis suppenee jos ja vain jos $0 \leq x < 2$.

. . . .

Ongelma 6.1.3. Tutki, millä $x \in \mathbb{R}$ potenssisarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+2)^j}{j^2+1}$$

suppenee.

. . . .

Vertaamalla potenssisarjaa geometriseen sarjaan nähdään, että potenssisarjan suppeneminen/hajaantuminen yhdessä pisteessä määrää suppemisen/hajaantumisen isossa joukossa seuraavasti:

Lause 6.1.4 (Abelin lause)**.** *(i) Jos potenssisarja* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j$ *suppenee kun* $x = x_1$*, niin se suppenee (itseisesti) kaikilla* x*, joille* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$*.*

(ii) Jos potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j$ *hajaantuu kun* $x = x_2$*, niin se hajaantuu kaikilla* x*, joille* $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$*.*

TODISTUS. Oletetaan, että $x_0 = 0$ (yleinen tapaus jätetään harjoitustehtäväksi).

(i) Koska oletuksen perusteella (luku)sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x_1^j$$

suppenee, niin 0-testin eli Lauseen 2.2.5 nojalla

$$\lim_{j\to\infty} a_j x_1^j = 0.$$

Niinpä on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_j||x_1|^j \le 1 \quad \text{kaikilla } j \ge N.$$

Tarkastellaan pisteitä x, joille $|x| < |x_1|$. Nyt kaikilla $j \ge N$ pätee

$$|a_j||x|^j = |a_j||x_1|^j \frac{|x|^j}{|x_1|^j} = \underbrace{|a_j||x_1|^j}_{\le 1} \left(\frac{|x|}{|x_1|}\right)^j \le q^j,$$

missä $q = \frac{|x|}{|x_1|} < 1$. Koska geometrinen sarja $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ suppenee, niin sarja $\sum_{j=N}^{\infty} |a_j||x|^j$ suppenee Majoranttiperiaatteen (Lause 2.3.2) nojalla, ja siten myös sarja $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j||x|^j$ suppenee. Näin ollen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ suppenee itseisesti.

(ii) Sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ hajaantuminen, kun $|x| > |x_2|$, nähdään tekemällä vastaoletus ja käyttämällä edellistä kohtaa apuna. Tämä on jätetty Harjoitustehtäväksi **2.** □

. . . .

Esimerkki 6.1.5. Tarkastellaan Esimerkin 6.1.2 potenssisarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{j}.$$

Kun $x = 2$, kyseessä on harmoninen sarja, joka hajaantuu. Lauseen 6.1.4 mukaan potenssisarja hajaantuu (ainakin), kun $|x-1| > 1$ eli kun $x < 0$ tai $x > 2$.

Kun $x = 0$, kyseessä on vuorotteleva harmoninen sarja, joka suppenee. Lauseen 6.1.4 nojalla potenssisarja suppenee itseisesti (ainakin), kun $|x-1| < 1$ eli kun $0 < x < 2$.

Näin ollen esimerkin potenssisarja suppenee täsmälleen välillä $[0, 2[$.

. . . .

Ongelma 6.1.6. Millä muuttujan x arvoilla potenssisarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^j}{2^j j}$$

suppenee? Entä itseisesti?

. . . .

Määritelmä 6.1.7. Potenssisarjan $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ **suppenemissäde** on luku

$$R = \sup\left\{|x-x_0| : \text{ sarja } \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j \text{ suppenee}\right\} \in [0,\infty].$$

Jos $R = 0$, potenssisarja suppenee vain keskuksessaan $x = x_0$. Jos taas $R = \infty$, potenssisarja suppenee koko reaalilukujen joukossa.

Esimerkki tapauksesta $R = 0$ nähtiin jo Esimerkissä 6.1.2, kun tutkittiin potenssisarjaa $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^j x^j$.

....

Ongelma 6.1.8. Näytä, että potenssisarjan $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{x^j}{j!}$ suppenemissäde $R = \infty$.

....

Lause 6.1.9. *Olkoon R potenssisarjan*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$$

suppenemissäde ja $0 < r < R$. Tällöin potenssisarja

(i) suppenee itseisesti välillä $]x_0-R, x_0+R[$ ja tasaisesti välillä $[x_0-r, x_0+r]$.

(ii) hajaantuu kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0-R, x_0+R]$.

TODISTUS. Itseistä suppenemista ja hajaantumista koskevat väitteet seuraavat Abelin lauseesta 6.1.4 ja suppenemissäteen määritelmästä:

Olkoon $x \in\,]x_0-R, x_0+R[$. Suppenemissäteen määritelmän mukaan on olemassa $x_1 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|x-x_0| < |x_1-x_0| \le R \quad \text{ja} \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x_1-x_0)^j \text{ suppenee.}$$

Lauseen 6.1.4 nojalla $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenee itseisesti.

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0-R, x_0+R]$, niin $|x-x_0| > R$ ja suppenemissäteen määritelmän mukaan $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ hajaantuu.

Tasainen suppeneminen seuraa Weierstrassin M-testistä 5.3.1: Jos $x \in [x_0-r, x_0+r]$, niin

$$|a_j(x-x_0)^j| \le |a_j|\, r^j$$

ja sarja $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j|\, r^j$ suppenee, sillä sen termit $|a_j|\, r^j$ ovat potenssisarjan $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ termien itseisarvot pisteessä $x = x_0 + r$, jossa potenssisarjan tiedetään jo suppenevan itseisesti todistuksen alkuosan perusteella. □

....

Huomautus 6.1.10. (i) Potenssisarjan suppeneminen välin $]x_0 - R, x_0 + R[$ päätepisteissä on tarkastettava erikseen (esimerkiksi lukusarjojen suppenemistestejä käyttäen).

(ii) Potenssisarja ei yleensä suppene tasaisesti koko välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$. Esimerkiksi geometrinen sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j,$$

jolle $R = 1$, ei suppene tasaisesti koko välillä $]-1, 1[$ (katso Esimerkki 5.2.3).

(iii) Lauseista 6.1.9 ja 5.3.4 seuraa, että potenssisarjan määräämä funktio f on jatkuva ja integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ ja sen integraali voidaan laskea sarjan termien integraalien summana. Erityisesti kaikilla $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ on

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t - x_0)^j\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_j(t - x_0)^j\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1}(x - x_0)^{j+1}.$$

. . . .

Suppenemissäteen selvittäminen onnistuu monesti seuraavan lauseen avulla.

Lause 6.1.11. *Olkoon* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ *potenssisarja ja olkoon* R *sen suppenemissäde.*

(a) Jos on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{|a_j|}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, niin*

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{|a_j|}}.$$

(b) Jos on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, niin*

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}.$$

TODISTUS.

(a) Olkoon $S = \lim\limits_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}$. Oletetaan ensin, että $0 < S < \infty$. Koska

$$\sqrt[j]{|a_j||x - x_0|^j} = \sqrt[j]{|a_j|}|x - x_0| \to S|x - x_0|, \quad \text{kun } j \to \infty,$$

niin Juuritestin nojalla sarja suppenee (itseisesti), kun $S|x - x_0| < 1$ ja hajaantuu, kun $S|x - x_0| > 1$. Siten suppenemissäteelle pätee $R = \frac{1}{S}$.

Jos $S = 0$, niin potenssisarja suppenee (itseisesti) kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $R = \infty$. Jos taas $S = \infty$, niin jokaiselle $x \neq x_0$ pätee

$$\sqrt[j]{|a_j||x - x_0|^j} = \sqrt[j]{|a_j|}|x - x_0| \to \infty, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Niinpä potenssisarja $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ suppenee vain kun $x = x_0$, joten $R = 0$.

(b) Samaan tapaan suhdetestin avulla. Harjoitustehtävä **13.**

$\square$

. . . .

Esimerkki 6.1.12. (a) Aiemmin on todettu, että potenssisarjan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{j}$$

suppenemissäde on 1. Suppenemissäteen selvittämiseen voi käyttää Lauseen 6.1.11 kumpaa kohtaa tahansa, sillä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{j}}{\frac{1}{j+1}} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[j]{\frac{1}{j}} = 1\,.$$

(b) Selvitetään potenssisarjan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

suppenemissäde.

Ratkaisu. Tässä siis $a_j = \frac{1}{j!}$. Koska

$$\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|} = \frac{(j+1)!}{j!} = j+1 \to \infty, \quad \text{kun } j \to \infty,$$

niin Lauseen 6.1.11 nojalla $R = \infty$. Potenssisarja suppenee siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Huomaa, että koska suppenevan sarjan termien raja-arvo on 0, niin $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{x^j}{j!} = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kertoma $j!$ kasvaa siis nopeammin kuin potenssi x^j.

. . . .

Ongelma 6.1.13. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{j^2} x^j$$

suppenemissäde.

. . . .

Huomautus 6.1.14. Suppenemissäde riippuu vain potenssisarjan kertoimista ja sen voi määrittää käyttämällä lukusarjojen yhteydessä esiteltyjä juuri- ja suhdetestejä. Emme todista tulosta, mutta yleisesti pätee: Jos R on potenssisarjan $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenemissäde, niin

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|} \right).$$

Yllä esiintyvä raja-arvo on aina olemassa (se voi olla ∞, jolloin suppenemissäde on 0), sillä jono $(\sup\{ \sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k\})_{k\in\mathbb{N}}$ on vähenevä.

. . . .

6.2 Derivaattasarja

Lemma 6.2.1. *Potenssisarjalla* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ja derivaattojen sarjalla*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

on sama suppenemissäde.

TODISTUS. Olkoon R potenssisarjan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenemissäde ja R_d derivaattojen sarjan suppenemissäde. Näytetään, että $R = R_d$.

- Todistetaan ensin, että $R_d \leq R$.

  Jos $R_d = 0$, niin väite on selvästi totta. Oletetaan siis, että $R_d > 0$, ja olkoon $x_1 \in \,]x_0 - R_d, x_0 + R_d[$. Lauseen 6.1.9 nojalla derivaattojen sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x_1-x_0)^{n-1}$ suppenee itseisesti. Koska

  $$|a_n(x_1-x_0)^n| \leq |x_1-x_0|\,|na_n(x_1-x_0)^{n-1}|, \qquad \text{kaikilla } n \geq 1,$$

  niin majoranttiperiaatteen (Lause 2.3.2) nojalla sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ suppenee itseisesti.

  Abelin lauseen 6.1.4 perusteella $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee itseisesti kaikilla x, joille $|x-x_0| < |x_1-x_0|$. Koska x_1 on mielivaltainen luku väliltä $]x_0 - R_d, x_0 + R_d[$, niin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee itseisesti ainakin, kun $|x-x_0| < R_d$.

  Siis $R_d \leq R$.

- Näytetään vielä, että $R \leq R_d$.

  Jälleen voidaan olettaa, että $R > 0$. Olkoon $x_1 \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$. Valitaan $r \in \mathbb{R}$ siten, että $|x_1 - x_0| < r < R$, jolloin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee, kun $x = x_0 + r$, eli sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n$ suppenee. Erityisesti $a_n\, r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

  Tällöin on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $|a_n|\, r^n \leq 1$, kun $n \geq N$. Nyt

  $$|na_n(x_1-x_0)^{n-1}| = |a_n|\, r^n\, n\, \frac{|x_1-x_0|^{n-1}}{r^n} \leq \frac{1}{r}\, n \left(\frac{|x_1-x_0|}{r}\right)^{n-1}, \quad \text{kun } n \geq N.$$

  Koska Lauseen 6.1.11 nojalla sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ suppenemissäde on 1, niin sarja

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r}\, n \left(\frac{|x_1-x_0|}{r}\right)^{n-1}$$

  suppenee.

Näin ollen sarja $\sum\limits_{n=N}^{\infty} na_n(x_1 - x_0)^{n-1}$ suppenee itseisesti majoranttiperiaatteella (Lause 2.3.2). Siis myös derivaattojen sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ suppenee itseisesti, kun $x = x_1$.

Abelin lauseen 6.1.4 nojalla derivaattojen sarja suppenee itseisesti kaikilla x, joille $|x-x_0| < |x-x_1|$. Koska x_1 on mielivaltainen luku väliltä $]x_0-R, x_0+R[$, derivaattojen sarja suppenee itseisesti ainakin, kun $|x - x_0| < R$. Olemme näin osoittaneet, että $R \leq R_d$.

□

. . . .

Seuraavaksi näytetään, että potenssisarjan määräämällä funktiolla on kaikkien kertalukujen derivaatat ja potenssisarja voidaan derivoida termeittäin.

Lause 6.2.2. *Olkoon* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *potenssisarja ja* R *sen suppenemissäde. Tällöin funktiolla*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$. *Lisäksi kaikille* $k \in \mathbb{N}$ *pätee*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \qquad \textit{kaikilla } x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[\,.$$

Erityisesti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ *on*

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n.$$

Todistus. Lemman 6.2.1 mukaan potenssisarjalla ja sen termien derivaattojen muodostamalla sarjalla on sama suppenemissäde R.

Olkoot $x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[$ ja $|x - x_0| < r < R$. Lauseen 6.1.9 mukaan sarjat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

suppenevat tasaisesti välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$. Lauseesta 5.3.4 seuraa, että summafunktio f on derivoituva pisteessä x ja

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Erityisesti $f'(x_0) = a_1$. Vastaavasti päätellään, että

$$f''(x) = (f')'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

sarjan suppenemissäde on R ja $f''(x_0) = 2a_2$. Loppu väitteestä saadaan induktiolla. □

. . . .

Lause 6.2.2 näyttää, että saman keskuksen x_0 ympärille kehitetyn potenssisarjan kertoimet määräytyvät yksikäsitteisesti sarjan summasta:

Seuraus 6.2.3. *Jos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \qquad \textit{kaikilla } x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[\,,$$

missä $R > 0$ *on sarjojen suppenemissäde, niin*

$$a_n = b_n \qquad \textit{kaikilla } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Todistus. Lausesta 6.2.2 saadaan, että

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = b_n \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

ja siten myös $a_0 = b_0$. □

. . . .

Funktiosarjojen avulla pystytään laskemaan joidenkin sarjojen summia. Usein päättelyissä tarvitaan Analyysin peruslausetta ja tietoa siitä, että voidaan integroida ja derivoida sarjoja termeittäin.

. . . .

Esimerkki 6.2.4. Lasketaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

summa.

Ratkaisu. Tutkitaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Koska $\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1$, kun $n \to \infty$, niin sarjan suppenemissäde on 1. Myös sarjan termejä derivoimalla tai integroimalla saaduilla potenssisarjoilla on sama suppenemissäde. Kun $-1 < x < 1$, saadaan Lauseen 6.2.2 nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(nx^n) \\
&= x \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \frac{d}{dx}\left(x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \right) \\
&= x \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= x \frac{1+x}{(1-x)^3}\,,
\end{aligned}$$

missä sarjan laskemiseen käytettiin Esimerkkiä 3.3.5. Nyt valitsemalla $x = \frac{1}{2}$ saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

Edellä johdetusta yhtälöstä

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

voi Lauseen 6.2.2 nojalla lukea funktion $f\colon\,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

derivaatat nollassa; kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on

$$f^{(n)}(0) = n^2 n!.$$

. . . .

Harjoitustehtäviä

1. Määritä potenssisarjojen keskukset ja suppenemissäteet.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\, 2^{2n}} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-7)^n}{(n+1)\, 7^n}$$

2. Todista Lauseen 6.1.4 hajaantumisosa, kun $x_0 = 0$:

Olkoon $x_2 \in \mathbb{R}$ sellainen piste, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ hajaantuu, kun $x = x_2$. Osoita, että potenssisarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

hajaantuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla $|x| > |x_2|$.

3. Todista Lauseen 6.1.4 yleiset versiot:

(a) Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ suppenee, kun $x = x_1$. Näytä, että tällöin potenssisarja suppenee itseisesti kaikille x, joille pätee $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

(b) Oletaan, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ hajaantuu, kun $x = x_2$. Näytä, että tällöin potenssisarja hajaantuu kaikille x, joille pätee $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

4. Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla potenssisarjat

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} j! x^j$, ja

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} (\sqrt{j+1} - \sqrt{j}) x^j$

suppenevat?

5. Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j} x^j,$$

suppenee?

6. Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5} \left((-1)^k 8 - \frac{3}{4^k} \right) x^k$$

suppenee?

7. Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet

(a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}x^{j}$

(b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j^2}x^{j}$.

Missä joukossa sarjat suppenevat?

8. Anna perusteltu esimerkki potenssisarjasta, joka suppenee joukossa $[-1,3[$ ja hajaantuu muualla.

9. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(3x+2)^n}{n+1}$$

keskus, kertoimet ja suppenemissäde. Missä joukossa sarja suppenee?

10. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(x+6)^j}{\log j}$$

suppenemissäde. Missä joukossa sarja suppenee?

11. Missä joukossa potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\sqrt{k+1}}$$

suppenee?

12. Olkoon $b>0$. Millä luvun $x\in\mathbb{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}(bx+1)^n$$

suppenee?

13. Todista Lauseen 6.1.11 kohta (b): Olkoot $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j(x-x_0)^j$ potenssisarja ja R sen suppenemissäde. Jos jonolla $\left(\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}\right)_{j=0}^{\infty}$ on raja-arvo $\in[0,\infty]$, niin

$$R=\lim_{j\to\infty}\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}.$$

14. Olkoon $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jono, jolle $j\le a_j\le j^2$ kaikilla $j\in\mathbb{N}$. Millä luvun $x\in\mathbb{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_jx^j$$

suppenee?

15. Olkoot $a_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aidosti vähenevä jono, jolle $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ ja sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu. Millä luvun $x \in \mathbb{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

suppenee?

16. Määrää potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$$

suppenemissäde. Missä joukossa sarja suppenee?

17. Määrää potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3} x^{n^2}$$

suppenemissäde.

18. Osoita, että

(a) $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$, kun $|x| < 1$.

(b) $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^k$, kun $x > \frac{1}{2}$.

19. Osoita derivaattojen avulla, että

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}, \quad \text{kun } |x| < 1.$$

(Vihje: Tehtävä **18.**)

20. Esitä integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\, dx$$

sarjana ja perustele laskusi.

21. Minkä funktion potenssisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{2k-2}$$

määrää, kun $|x| < 1$?
(Vihje: Tehtävä **18.** ja **19.**)

22. Laske sarjan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{3^n}$$
summa.

23. Osoita induktiolla, että Lauseen 6.2.2 oletuksin pätee
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \quad \text{kaikilla } x \in]x_0-R, x_0+R[$$
kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja totea lisäksi, että
$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}\,.$$

24. Esitä funktio
$$f(x) = \frac{1}{1-x^3}$$
potenssisarjana, joka suppenee välillä $]-1,1[$, ja määritä tämän avulla funktion 20., 21. ja 22. derivaatta pisteessä $x=0$.

25. Osoita, että potenssisarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$
suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kun määritellään $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$
niin näytä, että funktiolla F on kaikkien kertalukujen derivaatat ja että funktio F toteuttaa differentiaaliyhtälön
$$\begin{cases} F''(x) + F(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}, \\ F(0) = 1, \\ F'(0) = 0. \end{cases}$$

26. Olkoot $h, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktioita siten, että
$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{ja} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Osoita, että funktiot h ja g ovat hyvin määriteltyjä. Osoita sitten, että kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funktio
$$f = \alpha h + \beta g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
toteuttaa differentiaaliyhtälön
$$\begin{cases} f''(x) - f(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = \alpha, \\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

Viikko 7

Taylorin polynomit

7.1 Taylorin polynomit ja Taylorin lause

Tässä luvussa tarkoituksena on arvioida annettua funktiota f polynomilla pisteen x_0 lähellä.

Määritelmä 7.1.1. Olkoon funktio f n kertaa derivoituva välillä $]a, b[$. Funktion f n:s **Taylorin polynomi** pisteessä $x_0 \in\,]a, b[$ on

$$\begin{aligned} T_{n,x_0} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

missä $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ja $0! = 1$.

Funktiota $R_{n,x_0} f \colon\,]a, b[\, \to \mathbb{R}$,

$$R_{n,x_0} f(x) = f(x) - T_{n,x_0} f(x)\,,$$

sanotaan funktion f n:nneksi **jäännöstermiksi**.

Huomautus 7.1.2. (i) Määritelmästä 7.1.1 seuraa, että

$$\begin{aligned} T_{0,x_0} f(x) &= f(x_0), \\ T_{1,x_0} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ T_{2,x_0} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Yleisesti n:s Taylorin polynomi $T_{n,x_0} f$ on astetta n oleva polynomifunktio, jonka kertoimet määräytyvät funktion f eri kertalukujen derivaatoista pisteessä x_0.

(ii) Jos funktio f voidaan esittää pisteen x_0 ympäristössä potenssisarjana, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, niin Lausee 6.2.2 mukaan kertoimille a_k pätee $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Kertoimet ovat siis samat kuin Taylorin polynomin kertoimet.

(iii) Funktion f n:nnellä Taylorin polynomilla on kaikkien kertalukujen derivaatat, ja

$$(T_{n,x_0}f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

(iv) Jäännöstermi $R_{n,x_0}f$ ilmaisee, kuinka paljon n:s Taylorin polynomi $T_{n,x_0}f$ eroaa funktiosta f pisteessä $x \in]a, b[$.

....

Esimerkki 7.1.3. (a) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 4.$$

Lasketaan funktion f Taylorin polynomit pisteiden $x_0 = 0$ ja $x_0 = 2$ suhteen.

Ratkaisu. Lasketaan Taylorin polynomit ensin pisteen $x_0 = 0$ suhteen. Koska $f(0) = 4$ ja lisäksi

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x^2 + 6x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad f'(0) = -1, \\ f''(x) = 12x + 6 \quad &\Longrightarrow \quad f''(0) = 6, \\ f'''(x) = 12 \quad &\Longrightarrow \quad f'''(0) = 12, \\ f^{(n)}(x) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 4,\ n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad f^{(n)}(0) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned} T_{0,0}f(x) &= 4, \\ T_{1,0}f(x) &= 4 - x, \\ T_{2,0}f(x) &= 4 - x + \frac{6}{2!}x^2 = 4 - x + 3x^2, \\ T_{3,0}f(x) &= 4 - x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 = 4 - x + 3x^2 + 2x^3 = f(x), \\ T_{n,0}f(x) &= f(x) \qquad \text{kaikilla } n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lasketaan sitten Taylorin polynomit pisteen $x_0 = 2$ suhteen. Nyt $f(2) = 30$ ja

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x^2 + 6x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad f'(2) = 35, \\ f''(x) = 12x + 6 \quad &\Longrightarrow \quad f''(2) = 30, \\ f'''(x) = 12 \quad &\Longrightarrow \quad f'''(2) = 12, \\ f^{(n)}(x) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 4,\ n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad f^{(n)}(2) = 0 \text{ kaikilla } n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} T_{0,2}f(x) &= 30, \\ T_{1,2}f(x) &= 30 + 35(x - 2) = -40 + 35x, \\ T_{2,2}f(x) &= 30 + 35(x - 2) + \frac{30}{2!}(x - 2)^2 = 30 + 35(x - 2) + 15(x - 2)^2 \\ &= 20 - 25x + 15x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,2}f(x) &= 30 + 35(x-2) + \frac{30}{2!}(x-2)^2 + \frac{12}{3!}(x-2)^3 \\ &= 30 + 35(x-2) + 15(x-2)^2 + 2(x-2)^3 \\ &= \ldots = 2x^3 + 3x^2 - x + 4 \quad \text{kaikilla } n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jälleen siis $T_{n,2}f(x) = f(x)$ kaikilla $n \geq 3$.

Edellä tehty havainto pätee kaikille polynomifunktioille: suoraan Taylorin polynomin määritelmästä nähdään, että korkeintaan astetta n olevan polynomin p n. Taylorin polynomi $T_{n,x_0}p$ on polynomi p itse.

(b) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Tällöin $f^{(k)}(x) = e^x$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Koska $e^0 = 1$, niin n:s Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$ on

$$T_{n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Lause 7.1.4. (Taylorin lause) *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ n kertaa derivoituva funktio ja olkoon $x_0 \in]a,b[$. Tällöin*

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) \text{ kaikilla } x \in]a,b[\,,$$

missä

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,x_0}f(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Todistus. Funktioilla $T_{n,x_0}f$ ja f on samat derivaatat pisteessä x_0 kertalukuun n saakka (Huomautus 7.1.2), joten jäännöstermille $R_{n,x_0}f(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ pätee

$$R_{n,x_0}f(x_0) = R'_{n,x_0}f(x_0) = R''_{n,x_0}f(x_0) = \cdots = R^{(n)}_{n,x_0}f(x_0) = 0\,.$$

Merkitään $g(x) = (x-x_0)^n$, jolloin g on n kertaa jatkuvasti derivoituva,

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad g^{(n-1)}(x) = n!(x-x_0).$$

Käytetään l'Hôpitalin sääntöä $(n-1)$ kertaa, jonka mukaan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{R'_{n,x_0}f(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x)}{g^{(n-1)}(x)},$$

jos raja-arvo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x)}{g^{(n-1)}(x)}$$

on olemassa. Derivaatan määritelmän mukaan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x) - R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x_0)}{x-x_0} = R^{(n)}_{n,x_0}f(x_0),$$

joten, koska $R^{(n)}_{n,x_0}f(x_0) = 0$, niin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x) - R^{(n-1)}_{n,x_0}f(x_0)}{x-x_0} = \frac{R^{(n)}_{n,x_0}f(x_0)}{n!} = 0.$$

Väite on todistettu. □

. . . .

Taylorin lauseen perusteella jäännöstermi $R_{n,x_0}f$ on kirjoitettavissa muodossa

$$R_{n,x_0}f(x) = E_n(x)(x - x_0)^n,$$

jollekin funktiolle E_n, jolle $E_n(x) \to 0$, kun $x \to x_0$.

. . . .

Esimerkki 7.1.5. (a) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Esimerkissä 7.1.3 lasketun perusteella

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n E_n(x)$$

missä $E_n(x) \to 0$, kun $x \to 0$.

(b) Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$. Tällöin $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ ja derivaatat noudattavat neljän peräkkäisen derivaatan osalta toistuvia kaavoja

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos(0) &&= 1 \\ f''(0) &= -\sin(0) &&= 0 \\ f'''(0) &= -\cos(0) &&= -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin(0) &&= 0 \end{aligned} \quad \text{ja} \quad \begin{aligned} g'(0) &= -\sin(0) &&= 0 \\ g''(0) &= -\cos(0) &&= -1 \\ g'''(0) &= \sin(0) &&= 0 \\ g^{(4)}(0) &= \cos(0) &&= 1 \end{aligned}$$

Näin ollen $f^{(2k)}(0) = 0 = g^{(2k+1)}(0)$ ja

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \text{ja} \quad g^{(2k)}(0) = (-1)^k$$

kaikille $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja siksi voidaan kirjoittaa funktioiden f ja g Taylorin polynomit kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pisteessä $x_0 = 0$ seuraavasti

$$\begin{aligned} T_{2n+1,0}f(x) = T_{2n+2,0}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{ja} \\ T_{2n,0}g(x) = T_{2n+1,0}g(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$. Lauseen 7.1.4 nojalla

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} E_{2n+1}(x) \quad \text{ja} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} E_{2n}(x),$$

missä $E_{2n+1}(x) \to 0$ ja $E_{2n}(x) \to 0$, kun $x \to 0$.

(c) Hyperbolisille trigonometrisille funktiolle saadaan vastaavasti arviot Taylorin lauseen avulla.

Koska $\sinh' x = \cosh x$ ja $\cosh' x = \sinh x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $\sinh(0) = 0$ ja $\cosh(0) = 1$, niin

$$\sinh^{(2k)}(0) = 0 = \cosh^{(2k+1)}(0) \quad \text{ja} \quad \cosh^{(2k)}(0) = 1 = \sinh^{(2k+1)}(0)$$

kaikilla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lausetta 7.1.4 käyttämällä saadaan esitykset

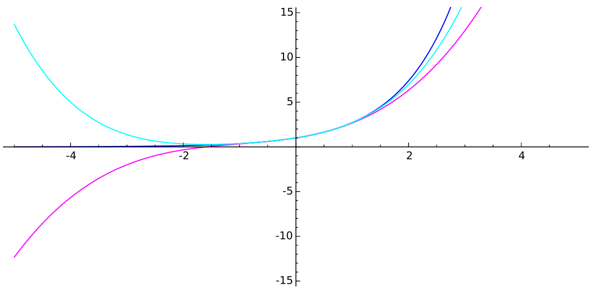
$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} E_{2n+1}(x) \quad \text{ja} \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} E_{2n}(x),$$

missä $E_{2n+1}(x) \to 0$ ja $E_{2n}(x) \to 0$, kun $x \to 0$.

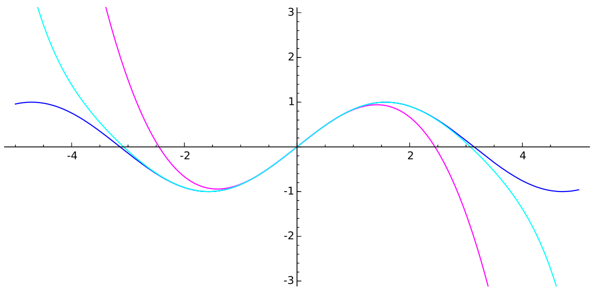
. . . .

Ongelma 7.1.6. Olkoon $f\colon]-1,\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log(1+x)$. Laske funktion f n. Taylorin polynomi pisteessä $x_0=0$. Minkä arvion saat funktiolla f Lauseen 7.1.4 nojalla?

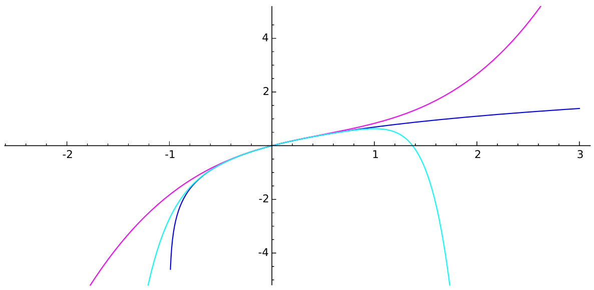
. . . .



(a) e^x



(b) $\sin x$



(c) $\log(1+x)$

Kuva 7.1: Esimerkin 7.1.5 ja Ongelman 7.1.6 kuvaajia (funktion graafi (sininen), 3. (roosa) ja 8. (akvamariini) Taylorin polynomin kuvaajat)

. . . .

Esimerkki 7.1.7. Laske raja-arvot

$$\text{(a)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}\qquad\qquad \text{(b)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$$

Ratkaisu. (a) Esimerkin 7.1.5 perusteella voidaan kirjoittaa

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + E_3(x)x^3,$$

missä

$$\lim_{x\to 0} E_3(x) = 0.$$

Sijoitetaan tämä alkuperäiseen lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\frac{\sin x - x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + E_3(x)x^3 - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^3}{6} + E_3(x)x^3}{x^2} = -\frac{x}{6} + E_3(x)x \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

(b) Esimerkin 7.1.5 perusteella voidaan kirjoittaa

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + E_3(x)x^3 \quad\text{ja}\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + E_2(x)x^2,$$

missä

$$\lim_{x\to 0} E_3(x) = 0 = \lim_{x\to 0} E_2(x).$$

Sijoitetaan nämä alkuperäiseen lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + E_3(x)x^3 - x}{x(\frac{x^2}{2} - E_2(x)x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + E_3(x)x^3}{\frac{x^3}{2} - E_2(x)x^3} = \frac{-\frac{1}{6} + E_3(x)}{\frac{1}{2} - E_2(x)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

. . . .

Seuraava yksikäsitteisyystulos auttaa joskus Taylorin polynomien etsinnässä ja lisäksi se kertoo, että Taylorin polynomi on funktion f **paras** polynomiapproksimaatio.

Lause 7.1.8. *Olkoon $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ n kertaa derivoituva ja olkoon $x_0 \in]a,b[$. Jos P on polynomi korkeintaan astetta n, jolle*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,,$$

niin tällöin

$$P(x) = T_{n,x_0} f(x) \text{ kaikilla } x \in \,]a,b[\,.$$

TODISTUS. Taylorin lauseen 7.1.4 mukaan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0} f(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Tämän ja oletuksen avulla huomataan, että

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x) - T_{n,x_0} f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - T_{n,x_0} f(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} \right] = 0.$$

Tällöin siis kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ pätee

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x) - T_{n,x_0} f(x)}{(x-x_0)^i} = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x) - T_{n,x_0} f(x)}{(x-x_0)^n} (x-x_0)^{n-i} = 0.$$

Lisäksi koska P ja $T_{n,x_0} f$ ovat korkeintaan astetta n olevia polynomeja, niin on olemassa kertoimet $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, siten, että

$$P(x) - T_{n,x_0} f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-x_0)^j.$$

Nyt kun $i = 0$, niin

$$0 = \lim_{x\to x_0} (P(x) - T_{n,x_0} f(x)) = \lim_{x\to x_0} \sum_{j=0}^{n} a_j (x-x_0)^j = a_0.$$

Kun $i = 1$, niin käyttämällä tietoa $a_0 = 0$ saadaan, että

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x) - T_{n,x_0} f(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{j=1}^{n} a_j (x-x_0)^{j-1} = a_1.$$

Vastaavasti nähdään, että $a_2 = \cdots = a_n = 0$. Niinpä

$$P(x) - T_{n,x_0} f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-x_0)^j = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \,]a,b[$$

eli

$$P(x) = T_{n,x_0} f(x) \quad \text{kaikilla } x \in \,]a,b[\,.$$

□

. . . .

Edellä olevan yksikäsitteisyyslauseen (eräs) hyöty on se, että riittää löytää millä tahansa keinolla tai konstilla n. asteen polynomi P, jolle

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

sillä tällaisen polynomin täytyy olla funktion f n. Taylorin polynomi.

. . . .

Esimerkki 7.1.9. Olkoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + E_2(x)x^2, \\ g(x) &= e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \tilde{E}_2(x)x^2, \end{aligned}$$

missä $E_2(x) \to 0$ ja $\tilde{E}_2(x) \to 0$, kun $x \to 0$. Määritetään tulon fg 2. Taylorin polynomi.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + E_2(x)x^2\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \tilde{E}_2(x)x^2\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \tilde{E}_2(x)x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \tilde{E}_2(x)\frac{x^4}{2} \\ &\quad + E_2(x)x^2 + E_2(x)x^3 + E_2(x)\frac{x^4}{2} + E_2(x)\tilde{E}_2(x)x^4 \\ &= 1 + x \\ &\quad + x^2 \underbrace{\left(\tilde{E}_2(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \tilde{E}_2(x)\frac{x^2}{2} + E_2(x) + E_2(x)x + E_2(x)\frac{x^2}{2} + E_2(x)\tilde{E}_2(x)x^2\right)}_{\hat{E}(x)} \\ &= 1 + x + \hat{E}(x)x^2, \end{aligned}$$

missä $\hat{E}(x) \to 0$, kun $x \to 0$.

Näin ollen Lauseen 7.1.8 nojalla

$$T_{2,0}(fg)(x) = 1 + x.$$

. . . .

Esimerkki 7.1.10. Etsitään Taylorin polynomi funktiolle $f \colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log(1 - x).$$

Määritellään ensin funktio $g \colon]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{1}{1 - t}.$$

Tällöin geometrisen summan avulla saamme

$$g(t) = \frac{1}{1 - t} = \frac{1 - t^n}{1 - t} + \frac{t^n}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} + \frac{t^n}{1 - t},$$

josta integroimalla ($x < 1$)

$$
\begin{aligned}
-\log(1-x) &= \int_0^x \frac{dt}{1-t} \\
&= \int_0^x (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})\, dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} - R_n(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} - R_n(x)\,,
\end{aligned}
$$

missä

$$R_n(x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt\,.$$

Nyt

$$
|R_n(x)| \le \begin{cases} \left| \int\limits_0^x t^n dt \right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}\,, & \text{kun } x \le 0\,, \\ \left| \dfrac{1}{1-x} \int\limits_0^x t^n dt \right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{(1-x)(n+1)}\,, & \text{kun } x \in [0, 1[\,. \end{cases} \tag{7.1}
$$

Siten kaikilla $x \in\,]-1, 1[$

$$f(x) = \log(1-x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} + R_n(x)\,,$$

missä

$$\left| \frac{R_n(x)}{x^n} \right| \to 0 \quad \text{kun } x \to 0\,.$$

Näin ollen Taylorin polynomin yksikäsitteisyystuloksen 7.1.8 nojalla funktion

$$f(x) = \log(1-x)$$

n:s Taylorin polynomi nollassa on

$$T_{n,0} f(x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j}\,.$$

Tulosta voi käyttää myös vuorottelevan harmonisen sarjan summan laskemiseen.

$$\log(2) = f(-1) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j} + R_n(-1) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{1}{j} + R_n(-1),$$

jossa oikealta tunnistetaan vuorottelevan harmonisen sarjan n:s osasumma.

Sarjoja käsiteltäessä todistettiin, että vuorotteleva harmoninen sarja suppenee ja arvioista (7.1) nähdään, että $R_n(-1) \to 0$, kun $n \to \infty$. Näin ollen yhtälön oikeasta puolesta voidaan ottaa raja-arvo, kun $n \to \infty$, ja saadaan vuorottelevan harmonisen sarjan summaksi

$$\log(2) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j}.$$

. . . .

Yksikäsitteisyyslauseesta saadaan myös sääntö tulofunktion Taylorin polynomin muodostamiseen tulontekijöiden Taylorin polynomien avulla. Todistus on jätetty Harjoitustehtäväksi **14.**

Seuraus 7.1.11. *Olkoot f ja g n kertaa derivoituvia funktioita välillä I ja olkoon $x_0 \in I$. Tällöin tulofunktion fg Taylorin polynomi $T_{n,x_0}(fg)$ on tulon $T_{n,x_0}f(x)T_{n,x_0}g(x)$ niiden termien summa, joiden aste on $\leq n$.*

7.2 Jäännöstermin lauseke

Lause 7.2.1. *Olkoon $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ $n+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Olkoon $x_0 \in]a,b[$. Tällöin*

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) \text{ kaikilla } x \in]a,b[\,,$$

missä jäännöstermille $R_{n,x_0}f(x)$ pätee, että

(1) ***Integraalimuoto:***

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

(2) ***Cauchyn muoto:*** *pisteiden x_0 ja x välissä on $c = c_x$, jolle*

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

(3) ***Lagrangen muoto:*** *pisteiden x_0 ja x välissä on $d = d_x$, jolle*

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Todistus.

(1) **Integraalimuoto:** Todistetaan väite induktiolla n:n suhteen. Analyysin peruslauseen mukaan

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = T_{0,x_0}f(x) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f^{(0+1)}(t)\,dt$$

kaikilla $x \in]a,b[$, eli väite pätee, kun $n = 0$.

Oletetaan, että väite pätee jollakin $k \geq 0$, toisin sanoen,

$$R_{k,x_0}f(x) = f(x) - T_{k,x_0}f(x) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt$$

kaikilla $x \in]a,b[$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)\,(x-t)^k\,dt \\
&= -\frac{1}{k!}\Big/_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)\frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1} + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+2)}(t)\frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}\,dt \\
&= \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}\,dt.
\end{aligned}$$

Niinpä

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{T_{k,x_0}f(x) + \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}_{=T_{k+1,x_0}f(x)} + \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}\,dt \\
&= T_{k+1,x_0}f(x) + \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

eli

$$
R_{k+1,x_0}f(x) = f(x) - T_{k+1,x_0}f(x) = \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)\,dt.
$$

Väite pätee siis myös kun $n = k+1$.

(2) **Cauchyn muoto:** Seuraa suoraan jäännöstermin integraalimuodosta (1) ja Integraalilaskennan väliarvolauseesta: funktio $t \mapsto (x-t)^n f^{(n+1)}(t)$ on jatkuvien funktioiden tulona jatkuva välillä $]a,b[$, joten pisteiden x_0 ja x välissä (jotka siis ovat välillä $]a,b[$) on piste c, jolle

$$
\begin{aligned}
R_{n,x_0}f(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0).
\end{aligned}
$$

(3) **Lagrangen muoto:** Seuraa suoraan jäännöstermin integraalimuodosta (1) ja Yleistetystä integraalilaskennan väliarvolauseesta: Oletuksen mukaan $f^{(n+1)}$ on jatkuva ja lisäksi integroituva funktio $t \mapsto (x-t)^n$ ei vaihda merkkiään pisteiden x_0 ja x välissä. Niinpä pisteiden x_0 ja x välissä on piste d siten, että

$$
\begin{aligned}
R_{n,x_0}f(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(d)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt \\
&= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(d)\frac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

□

. . . .

Monesti Taylorin lauseen sovellukset löytyvät arvioimisesta: jäännöstermi $R_{n,x_0}f(x)$ kertoo, miten paljon $T_{n,x_0}f(x)$ poikkeaa funktion $f(x)$ arvosta. Tämän avulla voidaan arvioida annettua funktiota halutulla tarkkuudella edellyttäen, että jäännöstermin $R_{n,x_0}f(x)$ saa pieneksi, kun lukua n kasvatetaan (lähellä lukua x_0 tämä on aina pieni).

. . . .

Esimerkki 7.2.2. (**Integraalin arviointia**) Arvioidaan integraalia

$$
\int_0^1 e^{x^2}\,dx
$$

kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu. Halutaan siis arvioida integraalia $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ siten, että virhe on $< 10^{-3}$. Taylorin kaavan nojalla

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + R_{n,0}(x^2),$$

missä jäännöstermi integraalimuodossa on

$$R_{n,0}(x^2) = \frac{1}{n!}\int_0^{x^2} (x^2 - t)^n e^t\,dt.$$

Tämän avulla voidaan kirjoittaa

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{k!}\,dx + \int_0^1 R_{n,0}(x^2)\,dx.$$

Koska $0 \le x \le 1$, voidaan jäännöstermiä arvioida seuraavasti:

$$0 \le R_{n,0}(x^2) = \frac{1}{n!}\int_0^{x^2} (x^2-t)^n e^t\,dt \le \frac{e}{n!}\int_0^{x^2} (x^2-t)^n\,dt = \frac{e x^{2(n+1)}}{(n+1)!} \le \frac{e}{(n+1)!},$$

(Lagrangen muodolla päästäisiin samaan arvioon, Lause 7.2.1 kohta (3)), jolloin sen integraalille pätee arvio

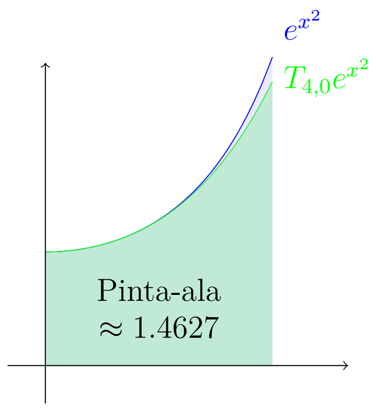
$$0 \le \int_0^1 R_{n,0}(x^2)\,dx \le \frac{e}{(n+1)!}.$$

Jos $n = 6$, niin

$$\frac{e}{(n+1)!} = \frac{e}{7!} \le \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 10^{-3},$$

joten haluttu tarkkuus saavutetaan ottamalla huomioon seitsemän ensimmäistä termiä summasta ($n = 6$). Tällä tarkkuudella

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \sum_{k=0}^{6}\int_0^1 \frac{x^{2k}}{k!}\,dx = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{(2k+1)k!}\\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 1,4626\ldots\end{aligned}$$



Kuva 7.2: Pinta-alan approksimointia Taylorin polynomin $T_{4,0}$ integraalin avulla.

. . . .

Esimerkki 7.2.3. (**Luvun e arviointia ja sen irrationaalisuus**) Olkoon $x > 0$. Aiemmin lasketun Esimerkin 7.1.3 ja Lauseen 7.2.1 (3) mukaan on

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(1+n)!}e^d x^{n+1}$$

jollain $d \in]0, x[$. Niinpä on

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1), \tag{7.2}$$

missä

$$\frac{1}{(1+n)!} \leq R_{n,0}(1) = \frac{1}{(1+n)!}e^d 1^{n+1} \leq \frac{3}{(1+n)!}.$$

Jos halutaan esimerkiksi, että luvun e arvioinnissa tehtävä virhe on korkeintaan $\frac{1}{100}$, niin valitaan n niin suureksi, että $(n+1)! > 300$. Valinta $n = 5$ käy, sillä $5! = 120$, jolloin $(5+1)! = 6! = 720$.

Näytetään sitten, että e on irrationaalinen. Jos e olisi rationaaliluku, niin olisi $e = \frac{a}{b}$ joillain $a, b \in \mathbb{N}$. Valitsemalla $n > \max\{b, 3\}$ ja käyttämällä kaavaa (7.2), saataisiin, että

$$\frac{n!a}{b} = 2n! + \frac{n!}{2} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_{n,0}(1),$$

missä sekä $\frac{n!a}{b}$ että oikean puolen kaikki yhteenlaskettavat termiä $n!R_n(1)$ lukuunottamatta ovat kokonaislukuja. Siten myös luvun $n!R_n(1)$ on oltava kokonaisluku. Tämä on mahdotonta, sillä

$$0 < n!R_{n,0}(1) \leq \frac{n!3}{(1+n)!} = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1.$$

Siis e on irrationaaliluku.

Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita seuraavat polynomit polynomina termin $(x+3)$ suhteen:

(a) $p(x) = x^4 + 4x^2 - 5$,

(b) $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Mitä Taylorin polynomeja nämä vastaavat?

2. Muodosta funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 1$,

(a) n. Taylorin polynomi $T_{n,x_0}f(x)$ pisteessä $x_0 = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) toinen Taylorin polynomi $T_{2,x_0}f(x)$ pisteessä $x_0 = 2$.

3. Määritä funktion $p(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$ kaikkien kertalukujen n. Taylorin polynomit $T_{n,x_0}p(x)$, kun $x_0 = 4$. Kuinka paljon arvo $T_{3,4}p(4 + 10^{-k})$ poikkeaa oikeasta arvosta $p(4 + 10^{-k})$? ($k \in \mathbb{N}$)

4. Muodosta funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log(1 + e^x),$$

kolmas Taylorin polynomi $T_{3,x_0}f(x)$ pisteessä $x_0 = 0$.

5. Muodosta määritelmän avulla funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\cos x}$, toinen Taylorin polynomi pisteissä $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ja $x_0 = \pi$.

6. Oletetaan, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kahdesti derivoituva siten, että

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) & = e^{-x} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R} \\ f(0) & = 0 \quad \text{ja} \\ f'(0) & = 2. \end{cases}$$

Laske funktion f neljäs Taylorin polynomi nollassa, $T_{4,0}f$.

7. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Muodosta funktion $f\colon \left]-1, \infty\right[\to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, Taylorin polynomi astetta n pisteessä $x_0 = 0$.

8. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Todista Tehtävän **7.** avulla binomikaava

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{missä} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

9. (a) Olkoot $p(x)$ ja $q(x)$ ensimmäisen asteen polynomeja. Osoita, että jos on $x_0 \in \mathbb{R}$, jolle

$$p^{(j)}(x_0) = q^{(j)}(x_0) \text{ kaikilla } j = 0, 1,$$

niin $p(x) = q(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(b) Olkoot $p(x)$ ja $q(x)$ astetta n olevia polynomeja. Jos on $x_0 \in \mathbb{R}$, jolle

$$p^{(j)}(x_0) = q^{(j)}(x_0) \text{ kaikilla } j = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

niin osoita induktion avulla, että $p(x) = q(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

10. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korkeintaan astetta n olevia polynomeja, joille eräälle $x_0 \in \mathbb{R}$ pätee

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Osoita, että $P(x) = Q(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

11. Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita, joille jollain $c \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$g(x) = f(cx) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Näytä, että

$$T_{n,x_0} g(x) = T_{n,cx_0} f(cx) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

12. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio ja olkoon

$$T_{n,x_0} f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

Osoita, että

(a) $T_{n-1,x_0} f'(x) = (T_{n,x_0} f)'(x)$ ja

(b) $T_{n+1,x_0} g(x) = \int_{x_0}^{x} T_{n,x_0} f(t)\, dt$, missä $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$.

13. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita Taylorin yksikäsitteisyyslausetta käyttäen, että funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x^2),$$

$(4n + 2)$. Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$ on muotoa

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n + 1)!}.$$

(saa hyödyntää funktion $g(x) = \sin(x)$ Taylorin polynomia)

14. Todista Seuraus 7.1.11: Olkoot f ja g n kertaa derivoituvia funktioita välillä I ja olkoon $x_0 \in I$. Tällöin tulofunktion fg Taylorin polynomi $T_{n,x_0}(fg)$ on tulon $T_{n,x_0} f(x) T_{n,x_0} g(x)$ niiden termien summa, joiden aste on $\leq n$.

15. Määritä funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x)\cos(x),$$

Taylorin polynomi $T_{6,0} f$.

16. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + 3x^2 - 4x^4 + \log(1 + e^x) x^4 \sin(x),$$

Taylorin polynomi $T_{4,0} f$.

17. Laske, Taylorin polynomeja käyttäen, raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}.$$

18. Laske, Taylorin polynomeja käyttäen, raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

19. Laske, Taylorin polynomeja käyttäen, raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - x}{\sin(3x^3)}.$$

20. Laske Taylorin polynomien avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{(x - \frac{\pi}{2})^2 e^x}.$$

21. Arvioi lukua $\cos 2$ niin, että virhe on pienempi kuin $< 10^{-4}$ käyttäen Taylorin polynomia ja arvioimalla (jotain muotoa) jäännöstermiä.

22. Miten monta termiä ainakin pitää sarjasta

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n n} \quad \text{tai} \quad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!}$$

ottaa huomioon, että summan tietää tarkkuudella 10^{-3}?

23. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, ja $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Osoita, että $T_{n,0}f \to f$ tasaisesti välillä $[a, b]$.

24. Arvioi integraalia

$$\int_0^1 x^x \, dx$$

vähintään tarkkuudella 10^{-4} käyttäen Taylorin polynomeja.

25. Olkoon $f\colon\ ]a, b[\to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Olkoon $n \geq 2$ parillinen ja olkoon $x_0 \in]a, b[$ piste, jossa

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x_0) < 0.$$

Osoita käyttäen Lagrangen jäännöstermiä, että funktiolla f on lokaali maksimi pisteessä x_0.

26. Olkoot f ja g n kertaa jatkuvasti derivoituvia välillä $]a,b[$ ja $x_0 \in\,]a,b[$. Oletetaan lisäksi, että

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0)$$

ja $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Osoita Taylorin kaavan avulla, että

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

27. Arvioi integraalia

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

vähintään 10^{-3} tarkkuudella käyttäen Taylorin polynomeja.

Viikko 8

Funktion arvioinnista, Taylorin sarja

8.1 Ääriarvot

Määritelmä 8.1.1. Funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ on pisteessä $x_0 \in I$ suurin arvo eli (globaali) **maksimi** välillä I, jos

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{kaikilla } x \in I.$$

Tällöin sanotaan, että x_0 on funktion f **maksimipiste**.

Funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ on pisteessä x_0 **lokaali maksimi**, jos $f(x_0)$ on funktion f maksimi jossain pisteen x_0 ympäristössä eli on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{kaikilla } x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap I.$$

Vastaavasti määritellään funktion f pienin arvo eli (globaali) **minimi**, **lokaali minimi** ja **minimipiste**. (Lokaaleille) minimi- ja maksimiarvoille käytetään yhteisnimitystä **(lokaalit) ääriarvot**, ja vastaavat pisteet ovat **(lokaaleja) ääriarvopisteitä**.

. . . .

Funktion lokaalien ääriarvopisteiden laatua voidaan tutkia korkeampien derivaattojen avulla.

Lause 8.1.2. *Olkoot $f\colon \left]a, b\right[\to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio ja $x_0 \in \left]a, b\right[$. Oletetaan lisäksi, että*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,.$$

Tällöin

(i) jos n on parillinen ja $f^{(n)}(x_0) > 0$, funktiolla f on lokaali minimi pisteessä x_0.

(ii) jos n on parillinen ja $f^{(n)}(x_0) < 0$, funktiolla f on lokaali maksimi pisteessä x_0.

(iii) jos n on pariton, piste x_0 ei ole funktion f lokaali ääriarvopiste.

Todistus. Koska $f^{(k)}(x_0) = 0$ kaikille $k = 1, \ldots, n-1$, niin n. Taylorin polynomi on

$$T_{n,x_0}f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

ja jäännöstermi

$$R_{n,x_0}f(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Taylorin lauseen 7.1.4 nojalla

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}f(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n},$$

joten

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0). \tag{$*$}$$

Koska oletuksen mukaan $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, niin yhtälön $(*)$ perusteella $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$ ja $\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ ovat lähellä pistettä x_0 samanmerkkisiä (ts. on olemassa $\delta > 0$ siten, että lausekkeet ovat samanmerkkisiä, kun $0 < |x - x_0| < \delta$).

Oletetaan nyt, että n on parillinen, jolloin $(x - x_0)^n > 0$ kaikilla $x \neq x_0$.

- Jos $f^{(n)}(x_0) > 0$, niin yhtälön $(*)$ nojalla $f(x) - f(x_0) > 0$ eli $f(x_0) < f(x)$, kun $x \neq x_0$ on pisteen x_0 lähellä. Piste x_0 on siis lokaali minimipiste.
- Jos $f^{(n)}(x_0) < 0$, niin yhtälön $(*)$ nojalla $f(x) - f(x_0) < 0$ eli $f(x_0) > f(x)$, kun $x \neq x_0$ on pisteen x_0 lähellä. Piste x_0 on siis lokaali maksimipiste.

Jos n on pariton, niin $(x - x_0)^n > 0$, kun $x > x_0$, ja $(x - x_0)^n < 0$, kun $x < x_0$. Koska $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ on vakio, niin yhtälön $(*)$ nojalla $f(x) - f(x_0)$ vaihtaa merkkiään pisteessä x_0. Näin ollen kyseessä ei ole ääriarvopiste. □

. . . .

Huomautus 8.1.3. Jos $f^{(n)}(x_0) = 0$, niin Lauseen 8.1.2 avulla ei voi päätellä mitään.

. . . .

Lausetta 8.1.2 käytetään erityisesti tapauksessa $n = 2$ eli silloin, kun funktion derivaatta pisteessä x_0 häviää ja toinen derivaatta ei.

. . . .

Ongelma 8.1.4. Etsi funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2(x - 1)$$

lokaalit ääriarvopisteet. Onko funktiolla f (globaalia) maksimia tai minimiä?

8.2 Taylorin sarja

Ongelma 8.2.1. Olkoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, ja $a > 0$. Osoita, että $T_{n,0}f \to f$ tasaisesti välillä $[-a, a]$. Entä suppeneeko jono $(T_{n,0}f)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin tai tasaisesti koko joukossa $\mathbb{R}$? Esitä funktio f potenssisarjana.

. . . .

Yhdistetään nyt Taylorin polynomit ja potenssisarjojen teoria. Jos funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteen x_0 ympäristössä I, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n,x_0}f(x)\,, \tag{$**$}$$

kun $x \in I$. Taylorin polynomeista saatu potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

suppenee pisteessä x, jos jäännöstermeille $R_{n,x_0}f(x)$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}f(x) = 0\,.$$

Tällöin yhtälön $(**)$ nojalla on myös

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,.$$

. . . .

Jos funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä $x_0 \in I$, niin potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

kutsutaan funktion f **Taylorin sarjaksi** pisteessä x_0.

. . . .

Esimerkki 8.2.2. Olkoon potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

suppenemissäde R ja g sarjan summafunktio eli $g\colon]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k.$$

Lauseen 6.2.2 mukaan funktiolla g on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä x_0 ja

$$a_k = \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Näin ollen suppenevan potenssisarjan osasummat

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$$

ovatkin potenssisarjan määräämän funktion g Taylorin polynomeja $T_{n,x_0}g(x)$ pisteessä x_0, ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

on funktion g Taylorin sarja.

. . . .

Jokaista funktiota, jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä x_0, ei voida kuitenkaan esittää potenssisarjana pisteen x_0 ympäristössä:

Esimerkki 8.2.3. Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Erotusosamääriä tarkastelemalla nähdään, että funktiolla g on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä $x = 0$ ja $g^{(j)}(0) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Siten

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Funktiota g ei voi esittää potenssisarjana muodossa

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

millään välillä $]-r, r[$, $r > 0$, sillä jos voitaisiin, niin Lauseen 6.2.2 mukaan $a_j = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ eli $g(x) = 0$ koko välillä $]-r, r[$, mikä ei ole totta.

. . . .

Seuraava lause näyttää, että rajoittamalla derivaattojen kasvuvauhtia (kertaluvun suhteen) saadaan riittävä ehto sille, että funktio voidaan esittää potenssisarjana annetun pisteen ympäristössä.

Lause 8.2.4. *Olkoon funktiolla $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ kaikkien kertalukujen derivaatat välillä $]x_0 - r, x_0 + r[\subset]a, b[$. Jos on olemassa $M > 0$, jolle kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \qquad \text{kun } x \in]x_0 - r, x_0 + r[,$$

niin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad \text{kun } x \in]x_0 - r, x_0 + r[,$$

ja potenssisarjan suppenemissäde on $\geq r$.

TODISTUS. Riittää näyttää, että kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ Taylorin jäännöstermi $R_{n,x_0} f(x)$ suppenee kohti nollaa, kun $n \to \infty$.

Käytetään Lagrangen muotoa jäännostermille (Lause 7.2.1 (3)): pisteiden x ja x_0 välissä on olemassa luku d, jolle

$$|R_{n,x_0} f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M^{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{(Mr)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0\,,$$

kun $n \to \infty$. Niinpä potenssisarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ suppenee kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ ja näin ollen tämän potenssisarjan suppenemissäde on vähintään r. $\square$

. . . .

Esimerkki 8.2.5. Eksponenttifunktiolle pätee

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}\,,$$

sillä

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}e^x\right| = |e^x| \leq e^r \leq (e^r)^n \quad \text{kaikilla } x \in \left]-r, r\right[, \text{ missä } r > 0.$$

Lauseen 6.1.11 avulla potenssisarjan suppenemissäteeksi saadaan $R = \infty$ eli oikealla oleva sarja suppenee funktioon e^x kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Eksponenttifunktion Taylorin sarja minkä tahansa pisteen x_0 ympäristössä saadaan Taylorin polynomien yksikäsitteisyydestä (Lause 7.1.8) seuraavasti: Edellisen nojalla

$$e^x e^{-x_0} = e^{x-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!},$$

joten kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n.$$

Samaan tapaan nähdään seuraavat:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R},$$
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R},$$
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}.$$

. . . .

Ongelma 8.2.6. Osoita Lauseen 8.2.4 avulla, että

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}.$$

Osoita sitten Analyysin peruslauseen avulla, että

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}.$$

. . . .

Seuraavaan lauseeseen on kerättynä yhteen laskusäännöt, jotka pätevät potenssisarjoille. Nämä ovat edellä todistettujen lauseiden seurauksia ja todistukset jäävät lukijalle harjoitustehtäviksi. Osa lauseen kohdista on todistettu jo aiemmin potenssisarjojen yhteydessä.

Lause 8.2.7 (Potenssisarjojen laskusäännöt)**.** *Olkoon* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ja* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *potenssisarjoja, joiden suppenemissäteet ovat* R *ja* R'*. Tällöin*

(a) $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$ *(ainakin) kaikilla* x*, joille* $|x-x_0| < \min\{R, R'\}$.

(b) $(\lambda f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)(x-x_0)^n$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ *kaikilla* x*, joille* $|x-x_0| < R$.

(c) $(fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$*, missä* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *kaikilla* x*, joille* $|x-x_0| < \min\{R, R'\}$.

(d) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ *kaikilla* x*, joille* $|x-x_0| < R$.

(e) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C$ *kaikilla* x*, joille* $|x-x_0| < R$.

. . . .

Ongelma 8.2.8. Osoita Lauseen 8.2.7 kohta (b) ja anna esimerkki, missä sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)(x-x_0)^n$$

suppenemissäde $> R$.

. . . .

Etsiessä Taylorin sarjaesitystä annetulle funktiolle kannattaa pyrkiä palauttamaan tilanne jo tunnettuihin Taylorin sarjoihin ja käyttämään edellistä lausetta.

Esimerkki 8.2.9. Anna perustellen funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$, Taylorin sarjaesitys.

Ratkaisu. Huomataan heti alkuun, että tunnettujen sarjakehitelmien perusteella kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Palataan tästä analyysin peruslauseen avulla takaisin alkuperäiseen funktioon. Integroiminen onnistuu termeittäin Lauseen 5.3.4 perusteella, jolloin kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dt \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n+1}\,dt \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}. \end{aligned}$$

Lisäksi nähdään, että $f^{(2k+1)}(0) = 0$ ja $f^{(2k)}(0) = (-1)^k 2^{2k-1}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.

. . . .

Muita Lauseen 8.2.7 avulla johdettavia Taylorin sarjoja ovat mm.

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{kaikille } x \in \,]-1,1],$$
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{kaikille } x \in [-1,1],$$
$$\operatorname{ar\,tanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{kaikille } x \in \,]-1,1[.$$

....

Esimerkki 8.2.10. Joskus sarjan summan voi laskea palauttamalla tilanne tunnettujen funktioiden sarjaesityksiin.

Lasketaan sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n n!}$$

summa.

Muokkaamalla summattavia saadaan annettu sarja muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^n (n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n!},$$

missä molemmat sarjat suppenevat suhdetestin nojalla (Lause 3.1.1).

Tiedetään, että kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

joten erityisesti

$$e^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^n}{n!}$$

Näin ollen sarjamme on kahden suppenevan sarjan summa ja se voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n n!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^n}{n!} = \frac{3}{2} e^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Olkoon $n \geq 2$ parillinen ja olkoon $x_0 \in]a,b[$ piste, jossa

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x_0) < 0.$$

Osoita käyttäen Lagrangen jäännöstermiä, että funktiolla f on lokaali maksimi pisteessä x_0.

2. Etsi funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ ääriarvot. Käytä Lausetta 8.1.2.

3. Olkoon $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Olkoon $x_0 \in]a,b[$ piste, jossa $f^{(n)}(x_0) < 0$. Leikkaako tai sivuaako Taylorin polynomin $T_{n-1,x_0}f(x)$ kuvaaja funktion f kuvaajaa pisteessä x_0? Riippuuko tulos luvusta n?
(Vihje: Tutki funktiota $f - T_{n-1,x_0}f$ ja käytä Lausetta 8.1.2.)

4. Lause 8.2.7 kohta (a): Olkoot $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ potenssisarjoja, joiden suppenemissäteet ovat R ja R'. Osoita, että potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n$ suppenemissäde on vähintään $\min\{R, R'\}$, ja että

$$(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n$$

kun $|x - x_0| < \min\{R, R'\}$. Anna esimerkki potenssisarjoista siten, että summasarjan suppenemissäde $> \min\{R, R'\}$.

5. Osoita, että

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \text{kaikille } x \in]-1, 1].$$

6. Osoita, että

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} \quad \text{kaikille } x \in [-1, 1].$$

7. Olkoon

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - x)^n}{n}, \text{ kun } 0 < x < 2.$$

Määritä $f'(x)$ ja perustele tämän avulla mikä (tuttu) funktio tämä f on?

8. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(e + x^2)$, Taylorin sarja pisteen $x_0 = 0$ suhteen ja määritä saamasi sarjan suppenemisväli.

9. Muodosta funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, Taylorin sarja esitykset pisteiden $x_0 = 0$ ja $x_0 = -2$ suhteen ja määritä saamiesi sarjojen suppenemisvälit.

10. Määrää perustellen funktioiden $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$ ja $g\colon]-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \log(1 + x^3)$, kaikkien kertalukujen Taylorin polynomit sekä Taylorin sarjat nollassa. Määrää $f^{(15)}(0)$ ja $g^{(27)}(0)$.

11. Määritellään $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{jos } x \neq 0, \\ 1, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Selvitä, mitä on $f^{(k)}(0)$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$.

12. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja määritellään $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Näytä, että funktio f on hyvin määritelty (eli että sarja suppenee määrittelyjoukossa) ja kaikille $x \in]-1,1[$ pätee

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x).$$

Osoita edelleen, että $f(x) = (1+x)^\alpha$.

13. Määritä perustellen funktioiden

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ja} \quad g(x) = \arcsin(x)$$

Taylorin sarjat pisteen $x_0 = 0$ suhteen.
(Vihje: Tehtävä **12.**)

14. Osoita, että lukusarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

suppenee, ja laske sen summa.

15. Laske sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

summa.

16. Tutki funktiosarjan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x^n} + (x-1)^n\right]$$

suppenemista.

17. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2(x)$ Taylorin sarja pisteen $x_0 = 0$ suhteen

(a) derivoimalla f ja tunnistamalla derivaatan sarjakehitelmä, jolloin funktion f sarjakehitelmän saa Analyysin peruslauseen avulla integroimalla.

(b) hyödyntämällä funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos^2(x)$, Taylorin sarjaa.

18. Sanotaan, että funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$, missä $I \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä avoin väli, on **reaalianalyyttinen** välillä I, jos jokaisella $x_0 \in I$ on ympäristö $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ ($\delta > 0$), jolla f voidaan esittää suppenevana potenssisarjana. Osoita, että jos f ja g ovat reaalianalyyttisiä välillä I ja on väli $J \subset I$ siten, että

$$f(x) = g(x) \quad \text{kaikille } x \in J,$$

niin tällöin $f(x) = g(x)$ kaikille $x \in I$.