

## Harjoitustehtävät 4

- Oletetaan, että havainto  $y$  noudattaa eksponenttijakaumaa parametrillä  $\theta$ , jonka prior on  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ .
  - Havaitaan  $y \geq 100$ . Laske parametrin  $\theta$  posterioriodotusarvo ja -varianssi.
  - Havaitaan  $y = 100$ . Laske parametrin  $\theta$  posterioriodotusarvo ja -varianssi.
  - Miksi posteriorivarianssi on suurempi kohdassa b) kuin kohdassa a) vaikka kohdassa b) informaatiota on enemmän?
- Mitattaessa 10 komponentin elinaikaa saadaan 20 kuukauden kuluessa seuraavat kahdeksan havaintoa:

4.8 0.9 5.2 0.7 8.0 1.0 11.4 16.2

Loput kaksi komponenttia ovat vielä toimintakunnossa, joten niiden elinajoista tiedetään vain, että ne ovat  $> 20$ .

Oletetaan, että havainnot ovat eksponenttijakautuneita ja riippumattomia ehdolla intensiteettiparametri  $\theta$  ja että priorijakama on  $p(\theta) \propto 1/\theta$  ( $\theta > 0$ ). Määritä posteriorijakama  $\theta$ :lle sekä 95% symmetrinen posterioriväli (Bayes-luottamusväli).

- Ratkaise seuraava tehtävä numeerisesti (R:llä): Oletetaan, että mitaustulokset ovat  $N(\theta, 1)$ -jakautuneita ja riippumattomia ehdolla  $\theta$ . Parametri  $\theta$  on tuntematon ja sille asetetaan epäaito priorijakauma  $p(\theta) \propto 1$ . Saadaan seuraavat mittaustulokset:

100.7 100.0 101.4 101.1 102.1 101.2 100.0 100.3 102.4 102.3

Tiedetään, että mittari ei pysty mittaamaan lukua 100 pienempiä arvoja, jolloin nämä arvot pyörivät ylöspäin arvoon 100.0. Piirrä (R:llä) parametrin  $\theta$  posteriorijakauman tiheysfunktion kuvaaja. Määritä myös posterioritodennäköisyys, että  $\theta > 100$ .

4. Määritä Jeffreysin priorijakauma Poisson-jakauman parametrille  $\theta$  sekä vastaava posteriorijakauma, kun otos on  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .
5. (jatkoa edelliseen tehtävään) Etsi Gamma-jakauman parametrit, jolla edellisessä tehtävässä määritettyä prioria voi approksimoida.
6. Olkoon normaalijakauman odotusarvo  $\theta$  tuntematon ja varianssi  $v$  tunnettu. Määritä Jeffreysin priori  $\theta$ :lle sekä vastaava posteriorijakauma, kun otos on  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Mikä on uuden havainnon  $\tilde{y}$  posteriorienusteijakauma?
7. Olkoon normaalijakauman odotusarvo  $\theta$  tunnettu ja varianssi  $\phi$  tuntematon. Määritä Jeffreysin priori  $\phi$ :lle sekä vastaava posteriorijakauma, kun otos on  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .