Harjoitustehtävät 5

1. Oletetaan, että havainnot $y_1, ..., y_n$ noudattavat Bin$(1, \theta)$-jakaumaa ja ovat riippumattomia ehdolla θ. Onnistumisten lukumäärä on $s = y_1 + ... + y_n$.

   Tarkastellaan kahta tilannetta (vrt. esim 3, luku 7.2):

   a) otoskooksi on ennalta valittu n,

   b) otantaa jatketaan, kunnes onnistumisten lukumäärä on s.

   Osoita, että harhaton estimaattori θ:lle on a-kohdan tapauksessa s/n ja b-kohdan tapauksessa $(s-1)/(n-1)$. Näytä lisäksi, että suurimman uskottavuuden estimaattori on kummassakin tapauksessa s/n.

2. Mallinnat $y_1, y_2, \ldots$ riippumattomina ehdolla θ ja $y_i|\theta \sim$ Pois(θ). Sovellat prioria Gamma(α, β). Havaitset $5, 1, 9, 4, 7, 3$. Seuraavat otanta-asetelmat voisivat synnyttää eo. aineiston:

   a) Päätät ennen havaintojen tekoa valita 6 havaintoa.

   b) Päätät lopettaa havaitsemisen, kun olet saanut ensimmäisen kolmosen.

   c) Otoskoko on satunnainen ja valitaan Poisson-jakaumasta, jonka odotusarvo on 12.

   d) Otoskoko on satunnainen ja valitaan Poisson-jakaumasta, jonka odotusarvo on 10θ.

   Mitkä näistä otanta-asetelmista johtavat samaan posteriorijakaumaan?

3. Tiedetään, että tietyntyyppisistä rakennuksista 1/3 kärsii kosteusvauriosta. Jos rakennuksessa on kosteusvaurio, testi havaitsee sen todennäköisyydellä 0.4. Jos kosteusvauriota ei ole, testi antaa aina negatiivisen tuloksen.

   Merkitään $\theta = 1$, jos kosteusvaurio ja $\theta = 0$, jos ei kosteusvauriota. Vastaavasti $y = 1$, jos testin tulos positiivinen ja $y = 0$, jos testin tulos negatiivinen. Havaitaan, että testin tulos on negatiivinen.

   Muotoillaan tilanne hypoteesintestauksena siten, että $H_0 : \theta = 0$ (ei kosteusvauriota) ja $H_1 : \theta = 1$ (kosteusvaurio). Määritä $p_0 = P(H_0|y)$ ja laske myös Bayes-tekijä. Tulkitse tulos.

4. Kasvinjalostuskokeessa on mitattu kontrolloiduissa oloissa kasvaneiden kasvien painot grammoina ($n = 10$):

   ```
   4.17  5.58  5.18  6.11  4.50  4.61  5.17  4.53  5.33  5.14
   ```

   Voidaan olettaa, että havainnot ovat normaalisti jakautuneet odotusarvolla θ ja varianssilla $\sigma^2 = 0.3$. Lisäksi havainnot ovat ehdollisesti riippumattomat ehdolla θ. Testataan hypoteesia $H_0 : \theta = 5$ vs. $H_1 : \theta = 5.5$. Olkoot näiden hypoteesien prioritodennäköisyydet $\pi_0 = \pi_1 = 0.5$.

   Laske hypoteesien Bayes-tekijä $B = p(y|H_0)/p(y|H_1)$ ja posteriorivedonlyöntisuhde p_0/p_1.

5. (jatkoa edelliseen) Tarkastellaan nyt yhdistettyjä hypoteeseja. Testataan hypoteesia $H_0 : \theta \geq 5$ vs. $H_1 : \theta < 5$. Prioriksi valitaan $\mathrm{N}(4.5, 0.06)$. Laske hypoteesien prioritodennäköisyydet π_0 ja π_1 sekä posterioritodennäköisyydet p_0 ja p_1.

6. (jatkoa edelliseen) Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa nollahypoteesi on pistehypoteesi mutta vaihtoehtoinen hypoteesi yhdistetty. Olkoon $H_0 : \theta = 5$ ja $H_1 : \theta \neq 5$. Prioritodennäköisyydet olkoot $\pi_0 = \pi_1 = 0.5$ ja olkoon priorijakauma H_1:n vallitessa sama kuin edellisessä tehtävässä: $p(\theta|H_1) = \mathrm{N}(\theta|4.5, 0.06)$. Laske hypoteesien Bayes-tekijä $B = p(y|H_0)/p(y|H_1)$ ja posteriorivedonlyöntisuhde p_0/p_1.

   (Vihje: Laske ensin $p(y|H_1) = \int p(y|\theta)p(\theta|H_1)d\theta$. Huomaa, ettei tässä tehtävässä normalisoivaa vakiota saa pudottaa pois!).