Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein. Tallentakaa tällä kertaa ja jatkossa viimeinen versio pdf-muodossa, ja palauta pdf. **Palautus to 19.11 klo 12.15 mennessä.** Apua saa harjoituksissa (myös harjoitusten Zoom-kanavalla `https://jyufi.zoom.us/j/65494396044` harjoitusten aikaan). Pyyntö: palauttakaa raportti Koppaan vasta samalla viikolla kuin DL on, jotta eri viikkojen palautukset pysyvät Kopassa erillään. Muista myös tarvittaessa vapauttaa määrittelemäsi objektit eri tehtävien välissä (`kill`-komento).

1. Opetellaan nyt derivointia ja integrointia Maximalla. Derivointi onnistuu komennolla `diff`, joka vaatii derivoitavan lausekkeen sekä muuttujan jonka suhteen derivoida. Tutustu syntaksiin tai valitse wxMaximasta valikosta *Calculus -> Differentiate* ja derivoi
   (a) Funktio $f_1(x) = x^5 - 5x + 4$ muuttujan x suhteen.
   (b) Funktio $f_2(z) = 2z^2 \log(z) - z^2$ muuttujan z suhteen.
   (c) Kahden muuttujan funktio $f_3(a, b) = \sin(ab)+\sin(a)\sin(b)$ ensin muuttujan a suhteen, sitten muuttujan b suhteen.
   (d) Funktion $f_4(y) = \sin(\pi y)$ viidestoista derivaatta muuttujan y suhteen.

2. Tutustu nyt integrointiin komennolla `integrate`. Testaa, että edellisen tehtävän a)- ja b)-kohdan tuloksia integroimalla saadaan oikea tulos. Laske myös määrätty integraali

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)}{\sin^3(x) + \cos^3(x)} dx.$$

3. Laske määräämätön integraali $\int e^{-ax} \sin x \mathrm{d}x$ (*integrate*) ja määrätty integraali $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \mathrm{d}x$ ($\infty =$ `inf`). Jotta määrätty integraali suppenisi (=olisi olemassa äärellisenä), pitää luvun a olla positiivinen.

   Maximalle voit antaa myös ennakko-oletuksia. Anna Maximalle oletus komennolla `assume(a>0);` ja laske yllä oleva integraali uudestaan. Oletukset voit poistaa komennolla `forget(facts());`.

4. Piirrä funktion $x \mapsto x^2 e^{2x}\big(\log\big(e^x + \frac{1}{x}\big) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\big)$ kuvaaja välillä $15 \leq x \leq 20$. Mitä kuvan perusteella voisi päätellä seuraavasta raja-arvosta

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{2x}\left(\log\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\right) ?$$

Päättele ensin kuvan perusteella, mikä raja-arvon pitäisi olla. Määrää sitten kyseinen raja-arvo (`limit`). Pohdi, miksi kuva ja raja-arvon laskeminen antavat erilaisen vastauksen.

Ymmärrystä saattaa auttaa piirtää uusi kuva vaikkapa välillä $1 \leq x \leq 13$.

5. Tutustutaan tässä tehtävässä omien funktioiden luomiseen. Luo Maximassa seuraavat funktiot. Molemmissa kohdissa oletetaan, että syötettävä lauseke on ainoastaan x-muuttujasta riippuva.
   (1) Funktio nimeltä `deriv_sijoitus`, joka ottaa argumentikseen lausekkeen ja palauttaa tämän lausekkeen derivaatan arvon pisteessä $x = 5$.
   (2) Funktio nimeltä `nelio_integraali`, joka ottaa argumentikseen lausekkeen ja palauttaa tämän lausekkeen neliön integraalin muuttujan x suhteen välillä $[0, 1]$.

   Testaa myös, miten funktiosi toimivat kun niihin syöttää lausekkeen $1/(x+1)$ tai jonkin mieleisesi lausekkeen.

6. Etsi yhtälön $x^3 = x + 2\cos(x)$ ratkaisu sekä komennoilla `find_root` että `mnewton`. Muista, että jälkimmäinen pitää ensin ladata käyttöön komennolla `load(mnewton)`. Tässä ja seuraavassa tehtävässä kannattaa ehdottomasti piirtää ainakin yksi kuva tilanteesta.

7. Etsi funktion $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2} - e^{-(x-3)^2}$ nollakohdat, lokaalit ääriarvot, globaali minimi ja maksimi sekä raja-arvo kun $x \to +\infty$.

8. Olemme jo huomanneet, että Maximan komento `integrate` tepsii määrättyjen integraalien laskemiseen. Komento toimii kuitenkin vain silloin, kun Maxima osaa laskea integroitavalle funktiolle järkevän integraalifunktion. Koita laskea komennolla määrätty integraali

$$\int_1^3 \frac{x}{2+\sin(x)} dx.$$

   Ei pitäisi toimia. Maximassa on kuitenkin määrättyjen integraalien laskemiseen myös numeerinen tapa komennolla `romberg`, jonka syntaksi on sama kuin komennon `integrate`. Laske myös tällä edellinen integraali.

9. Laske funktiolle $f(x, y) := 1 + (x - y)/(x + y)^3$ molemmat integraalit

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

   Mitä huomaat[1]?

10. Komennolla `part` voi poimia osia mistä hyvänsä listasta, lausekkeesta tai muusta. Nimeä yhtälö:

```
yhtalo:x^2-y^2=sin(t-cos(x))+log(2+%e^3);
```

   Miten saat komennolla `part(yhtalo,...)` poimittua yhtäsuuruusmerkin $=$, muuttujan t?

[1]Tähän liittyy nk. Fubinin lause

11. Useammasta kuin yhdestä muuttujasta riippuvan funktion derivaattoja kutsutaan *osittaisderivaatoiksi* ja niitä merkitään ”koukero-d”:llä, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jne. Vastaavasti toisen kertaluvun osittaisderivaattoja merkitään $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (derivoidaan kaksi kertaa x:n suhteen), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (derivoidaan kerran x:n ja kerran y:n suhteen), jne. Maximan `diff` laskee juuri näitä osittaisderivaattoja.

    Laske funktion $f(x, y) := \log(x^2 + y^2)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Laske myös $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ja osoita, että kyseinen lauseke on nolla.

12. Tee seuraavat määritykset (kumpikin omana syötteenään; `V` = ”vektori”)[2]:

    ```
    laplacian(f,V):=sum( diff(f, V[j], 2), j,1,length(V));
    ```

    Tehtävän 11 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ voidaan laskea nyt helpommin: `laplacian(f,[x,y])`. Kokeile.

13. **Differentiaaliyhtälö.** Maxima osaa ratkaista myös joitain differentiaaliyhtälöitä. Tavallinen differentiaaliyhtälö tunnetaan englanniksi lyhenteellä ODE (ordinary differential equation). Etsi sopiva Maxima-funktio (vinkki: Sopiva valikko wxMaximassa) ja ratkaise differentiaaliyhtälö $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = y$ eli $y' = y$.

14. **Koonti.** Tarkista, että dokumenttisi on wxMaximassa kommentoitu ja otsikoitu riittävästi (vrt. viime viikko), ja on muutenkin siisti ja viimeistelty, esim mahdolliset ylimääräiset testailut siivottu pois. Tallenna viimeisin versio pdf muodossa (Print valikkoa käyttämällä saa tallennettua pdf:n) ja palauta tämä pdf Kopassa.

---

[2]Nimi laplacian tulee siitä, että kyseistä differentiaalioperaattoria on tapana kutsua *Laplace-operaattoriksi* ja merkitä Δ. Siis $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.