Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein. Tallentakaa tällä kertaa ja jatkossa viimeinen versio **pdf-muodossa**, ja palauta pdf. **Palautus to 10.12 klo 12.15 mennessä.** Pyyntö: palauttakaa raportti Koppaan vasta samalla viikolla kuin DL on, jotta eri viikkojen palautukset pysyvät Kopassa erillään. Tämä on kurssin **viimeinen harjoitus**.

1. **Analyyttistä geometriaa.** Olkoon kolme pistettä $p_1 = (1, 2)$, $p_2 = (3, 0)$ ja $p_3 = (6, 4)$ tasossa annettu (piirrä kuva). Ratkaise seuraavaksi mikä on näiden pisteiden kautta kulkevan ympyrän yhtälö.

   Ohjeistusta: Ympyrällä on keskipiste (x_0, y_0) ja säde r jota et tunne. Tiedät kuitenkin, että jokainen pisteistä p_1, p_2 ja p_3 toteuttaa yhtälön
   $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$
   eli saat kolme yhtälöä kun sijoitat muuttujien (x, y) paikalle pisteiden p_1, p_2 ja p_3 koordinaatit. Ratkaise näistä muodostunut yhtälöryhmä esimerkiksi komennolla `algsys`.

   Piirrä nyt pisteet ja ympyrä samaan kuvaan, käyttäen eri värejä ja selvästi erottuvia pistetyyppejä. Ympyrän piirtämiseen kannattaa käyttää esimerkiksi komentoa `parametric` tai `implicit`.

2. **Matriiseja ja maksimointia.** Luo Maximaan matriisi
   $$M = \begin{bmatrix} 1 & e^{-a^2/2} & 1 \\ 3 & 1 + \frac{2}{a^2+1} & 5 - a \\ 2 & 0 & e^{-a^2/3} \end{bmatrix}$$
   joka riippuu parametrista $a \in (-\infty, \infty)$. Etsi numeerisesti kaksi parametrin a arvoa, joilla matriisilla M ei ole käänteismatriisia (tiedetään lineaarialgebrasta, että matriisilla on käänteismatriisi jos sen determinantti ei ole nolla).

   Laske seuraavaksi millä parametrin a arvolla M determinantti saa suurimman arvonsa. Havainnollista tätä myös kuvan avulla. Piirrä kuvaan sekä determinantin kuvaaja riippuen parametrista a, että löytämäsi erikoispisteet (eli determinantin nollakohdat ja maksimiarvo).

3. Luo uusi funktio Maximassa, joka ottaa argumentikseen lausekkeen $f(x)$ sekä pisteen x_0 ja tulostaa funktion f tangenttisuoran lausekkeen pisteessä x_0. Piirrä tämän avulla samaan kuvaan sekä funktio $x^2 + \sin(3x)$ että sen tangentti pisteessä $x = 1.5$.

4. **Harmoninen värähtelijä.** Fysiikan peruskursseilta saattaa olla tuttu jousen päässä värähtelevä punnus. Muistetaan, että harmonisen värähtelijän liike on sinimuotoista, joten sanotaan Maximalle, että paikka x riippuu ajasta t yhtälön $x = A\sin(\omega t)$ mukaan: `x:A*sin(omega*t)`. Tässä A on värähtelyn amplitudi ja ω kulmanopeus.

Olkoon jousen jousivakio k ja punnuksen massa m. Newtonin toinen laki tässä tilanteessa kuuluu $-kx = ma$, missä a on punnuksen kiihtyvyys. Lausekkeen $ma + kx$ pitäisi siis olla nolla. Nimeä tämä lauseke Maximalle. Muista, että kiihtyvyys a on paikan x toinen derivaatta ajan suhteen.

Sievennä nimeämääsi lauseketta `factor`-komennolla ja anna sievennetylle lausekkeelle nimi. Tästä muodosta nähdään, että kertoimen $m\omega^2 - k$ täytyy olla nolla. Poimitaan tämä tieto maximamaisesti käyttämällä `part`-komentoa. Kokeile vaikkapa komentoa `part(...,1,1)`, missä pisteiden tilalla on sievennetyn lausekkeesi nimi. Sinun pitäisi saada lauseke $m\omega^2 - k$; nimeä se. Ratkaise `solve`-komentoa käyttäen ω kun tiedetään, että viimeksi saatu lauseke on nolla. Voit halutessasi poimia `part`-komennolla tuloksesta haluamasi osan.

Näin on siis saatu Maximan avulla etsittyä värähtelevän punnuksen värähtelytaajuus massan ja jousivakion funktiona.

5. **Puolittava käyrä.** Olkoon Q neliö, jota rajottavat xy-akselit sekä suorat $y = 1$ ja $x = 1$. Tuntemattoman luvun $a \in (0, 1)$ määrittää seuraava ehto: Hyperbeli $xy = a$ (eli funktion $y = a/x$ kuvaaja) jakaa neliön Q kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. Määritä luvulle a likiarvo ja piirrä tilanteesta kuva wxdraw2d-ympäristössä.

   Hahmottamista voi auttaa piirtämällä ensin kuva tilanteesta kun esim. $a = 0.2$.

   Kuvanpiirrossa seuraavista asetuksista voi olla iloa: `line_type, xaxis, yaxis, xrange, yrange, proportional_axes`. Pystysuoran janan $\{(x, y) : x = 1, 0 < y < 1\}$ piirtämiseen seuraava avustus: `parametric(1,t,t,0,1)`. Jos päädyt yhtälöön luvulle a mutta se ei tunnu ratkeavan - koita aiemmilla viikoilla esiintynyttä funktiota `mnewton`.

6. **Summakaavojen etsimistä.** Luo Maximaan summa

$$S = \sum_{k=1}^{n} e^{kx}.$$

   Tehdään nyt seuraavaa:

   - Aseta systeemimuuttujaan `simpsum` arvo `false`.
   - Laske summan S kolmas derivaatta x:n suhteen. Tässä Maxima on vain derivoinut jokaisen summan S termin erikseen.
   - Katso mitä saat edellisen kohdan lausekkeesta kohdassa $x = 0$.

   Tässä vaiheessa Maximan tulisi tulostaa

$$\sum_{k=1}^{n} k^3. \tag{1}$$

   Koitetaan nyt etsiä tälle summalle vaihtoehtoinen kaava. Tee tämä seuraavalla tavalla:

   - Lataa funktio `simplify_sum` ja sievennä alussa määritelty summa S nätimpään muotoon.
   - Derivoi saatu lauseke kolme kertaa ja laske raja-arvo kun $x \to 0$.

- Sievennä saatua lauseketta mikäli tarpeen. Kokeile esim. komentoa `factor`.

Saatu lauseke on summa (1) toisella tavalla laskettuna, joten saat tästä halutun summakaavan (kirjoita saamasi kaava ylös).

Huomio: Tässä tehtävässä löydetyn kaavan summalle (1) olisi voinut löytää myös suoraan käyttämällä komentoa `simplify_sum` kyseiseen summaan. Tehtävässä esitetyllä tavalla voisi kuitenkin myös johtaa kaavat käsin, tosin se on käytännössä hieman työlästä.

7. **Koonti.** Tarkista, että dokumenttisi on wxMaximassa kommentoitu ja otsikoitu riittävästi, ja on muutenkin siisti ja viimeistelty, esim mahdolliset ylimääräiset testailut siivottu pois. Tallenna viimeisin versio pdf muodossa (Print valikkoa käyttämällä saa tallennettua pdf:n) ja palauta tämä pdf Kopassa.

Muista myös vastata kurssin palautekyselyyn!